

微专题 17 函数的极值

一、基础知识：

1、函数极值的概念：

(1) 极大值：一般地，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，如果对 x_0 附近的所有的点都有

$f(x) < f(x_0)$ ，就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，记作 $y_{\text{极大值}} = f(x_0)$ ，其中 x_0 是极大值点

(2) 极小值：一般地，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，如果对 x_0 附近的所有的点都有

$f(x) > f(x_0)$ ，就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值，记作 $y_{\text{极小值}} = f(x_0)$ ，其中 x_0 是极小值点

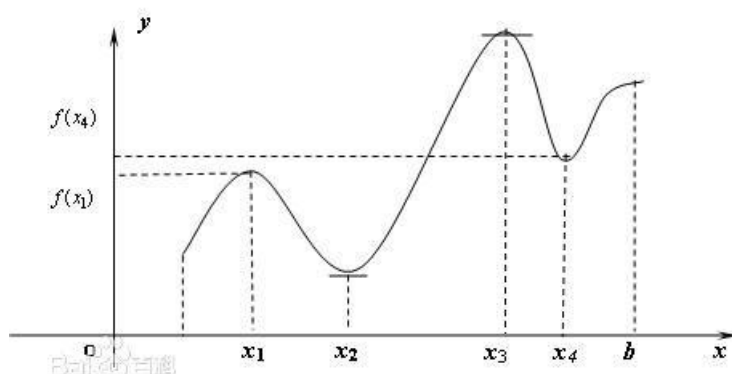
极大值与极小值统称为极值

2、在定义中，取得极值的点称为极值点，极值点是自变量的值，极值指的是函数值。请注意以下几点：

(1) 极值是一个局部概念：由定义，极值只是某个点的函数值与它附近点的函数值比较是最大或最小并不意味着它在函数的整个的定义域内最大或最小

(2) 函数的极值不是唯一的即一个函数在某区间上或定义域内极大值或极小值可以不止一个

(3) 极大值与极小值之间无确定的大小关系即一个函数的极大值未必大于极小值



(4) 函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不能成为极值点

3、极值点的作用：

(1) 极值点为单调区间的分界点

(2) 极值点是函数最值点的候选点

4、费马引理： $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，那么 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极值点 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

说明：①前提条件： $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导

②单向箭头：在可导的前提下，极值点 $\Rightarrow$ 导数 $=0$ ，但是导数 $=0$ 不能推出 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极值点，例如： $y=x^3$ 在 $(0,0)$ 处导数值为 0 ，但 $x=0$ 不是极值点

③费马引理告诉我们，判断极值点可以通过导数来进行，但是极值点的定义与导数无关（例如： $y=|x|$ 在 $(0,0)$ 处不可导，但是 $x=0$ 为函数的极小值点）

5、求极值点的步骤：

（1）筛选：令 $f'(x)=0$ 求出 $f'(x)$ 的零点（此时求出的点有可能是极值点）

（2）精选：判断函数通过 $f'(x)$ 的零点时，其单调性是否发生变化，若发生变化，则该点为极值点，否则不是极值点

（3）定性：通过函数单调性判断出是极大值点还是极小值点：先增后减 $\rightarrow$ 极大值点，先减后增 $\rightarrow$ 极小值点

6、在综合题分析一个函数时，可致力于求出函数的单调区间，当求出单调区间时，极值点作为单调区间的分界点也自然体现出来，并且可根据单调性判断是极大值点还是极小指点，换言之，求极值的过程实质就是求函数单调区间的过程。

7、对于在定义域中处处可导的函数，极值点是导函数的一些零点，所以涉及到极值点个数或所在区间的问题可转化成导函数的零点问题。但要注意检验零点能否成为极值点。

8、极值点与函数奇偶性的联系：

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，则当 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大（极小）值点时， $x=-x_0$ 为 $f(x)$ 的极小（极大）值点

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，则当 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大（极小）值点时， $x=-x_0$ 为 $f(x)$ 的极大（极小）值点

二、典型例题：

例 1：求函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的极值。

解： $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

令 $f'(x)>0$ 解得： $x<1 \therefore f(x)$ 的单调区间为：