

微专题 31 解三角形中的要素

一、基础知识：

1、正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ，其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径

正弦定理的主要作用是方程和分式中的边角互化。其原则为关于边，或是角的正弦值是否具有齐次的特征。如果齐次则可直接进行边化角或是角化边，否则不可行

例如：(1) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin A \sin B = \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab = c^2$

(2) $b \cos C + c \cos B = a \Rightarrow \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A$ (恒等式)

(3) $\frac{bc}{a^2} = \frac{\sin B \sin C}{\sin^2 A}$

2、余弦定理： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

变式：(1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

① 此公式通过边的大小（角两边与对边）可以判断出 A 是钝角还是锐角

当 $b^2 + c^2 > a^2$ 时， $\cos A > 0$ ，即 A 为锐角；

当 $b^2 + c^2 = a^2$ （勾股定理）时， $\cos A = 0$ ，即 A 为直角；

当 $b^2 + c^2 < a^2$ 时， $\cos A < 0$ ，即 A 为钝角

② 观察到分式为齐二次分式，所以已知 a, b, c 的值或者 $a:b:c$ 均可求出 $\cos A$

(2) $a^2 = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)$ 此公式在已知 $b+c$ 和 bc 时不需要计算出 b, c 的值，进行整体代入即可

行整体代入即可

3、三角形面积公式：

(1) $S = \frac{1}{2}a \cdot h$ (a 为三角形的底， h 为对应的高)

(2) $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$

(3) $S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$ (r 为三角形内切圆半径，此公式也可用于求内切圆半径)

(4) 海伦公式： $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

(5) 向量方法： $S = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ (其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 为边 a, b 所构成的向量，方向任意)

证明： $S = \frac{1}{2}ab \sin C \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 \sin^2 C = \frac{1}{4}a^2b^2 (1 - \cos^2 C)$

$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 - (ab \cos C)^2}$ ，而 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab \cos C$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

坐标表示： $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则 $S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$

4、三角形内角和 $A + B + C = \pi$ （两角可表示另一角）。

$$\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$$

$$\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$$

5、确定三角形要素的条件：

（1）唯一确定的三角形：

① 已知三边（SSS）：可利用余弦定理求出剩余的两个角

② 已知两边及夹角（SAS）：可利用余弦定理求出第三边，进而用余弦定理（或正弦定理）求出剩余两角

③ 两角及一边（AAS 或 ASA）：利用两角先求出另一个角，然后利用正弦定理确定其它两条边

（2）不唯一确定的三角形

① 已知三个角（AAA）：由相似三角形可知，三个角对应相等的三角形有无数多个。由正弦定理可得：已知三个角只能求出三边的比例： $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

② 已知两边及一边的对角（SSA）：比如已知 a, b, A ，所确定的三角形有可能唯一，也有可能有两个。其原因在于当使用正弦定理求 B 时， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ，而

$B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，一个 $\sin B$ 可能对应两个角（1 个锐角，1 个钝角），所以三角形可能不唯一。（判定是否唯一可利用三角形大角对大边的特点，具体可参考例 1）

6、解三角形的常用方法：

（1）直接法：观察题目中所给的三角形要素，使用正余弦定理求解

（2）间接法：可以根据所求变量的个数，利用正余弦定理，面积公式等建立方程，再进行求解

7、三角形的中线定理与角平分线定理

（1）三角形中线定理：如图，设 AD 为 $\triangle ABC$ 的一条中线，

$$\text{则 } AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2) \quad (\text{知三求一})$$

证明：在 $\triangle ABD$ 中

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos ADB \quad ①$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos ADC \quad ②$$

$$\because D \text{ 为 } BC \text{ 中点} \quad \therefore BD = CD$$

$$\because \angle ADB + \angle ADC = \pi \quad \therefore \cos ADB = -\cos ADC$$

$\therefore$ ①+②可得：

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

