

微专题 06 函数的图像

一、基础知识

1、做草图需要注意的信息点：

做草图的原则是：速度快且能提供所需要的信息，通过草图能够显示出函数的性质。在作图中草图框架的**核心要素是函数的单调性**，对于一个陌生的可导函数，可通过对导函数的符号分析得到单调区间，图像形状依赖于函数的凹凸性，可由二阶导数的符号决定（详见“知识点讲解与分析”的第3点），这两部分确定下来，则函数大致轮廓可定，但为了方便数形结合，让图像更好体现函数的性质，有一些信息点也要在图像中通过计算体现出来，下面以常见函数为例，来说明作图时常体现的几个信息点

（1）一次函数： $y = kx + b$ ，若直线不与坐标轴平行，通常可利用直线与坐标轴的交点来确定直线

特点：两点确定一条直线

信息点：与坐标轴的交点

（2）二次函数： $y = a(x-h)^2 + k$ ，其特点在于存在对称轴，故作图时只需做出对称轴一侧的图像，另一侧由对称性可得。函数先减再增，存在极值点——顶点，若与坐标轴相交，则标出交点坐标可使图像更为精确

特点：对称性

信息点：对称轴，极值点，坐标轴交点

（3）反比例函数： $y = \frac{1}{x}$ ，其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，是奇函数，只需做出正半轴图像即可（负半轴依靠对称做出），坐标轴为函数的渐近线

特点：奇函数（图像关于原点中心对称），渐近线

信息点：渐近线

注：

（1）所谓渐近线：是指若曲线无限接近一条直线但不相交，则称这条直线为渐近线。渐近线在作图中的作用体现为对曲线变化给予了一些限制，例如在反比例函数中， x 轴是渐近线，那么当 $x \rightarrow +\infty$ ，曲线无限向 x 轴接近，但不相交，则函数在 x 正半轴就不会有 x 轴下方的部分。

（2）水平渐近线的判定：需要对函数值进行估计：若 $x \rightarrow +\infty$ （或 $-\infty$ ）时， $f(x) \rightarrow$ 常数 C ，则称直线 $y = C$ 为函数 $f(x)$ 的水平渐近线

例如： $y = 2^x$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $y \rightarrow +\infty$ ，故在 x 轴正方向不存在渐近线

当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $y \rightarrow 0$ ，故在 x 轴负方向存在渐近线 $y = 0$

(3) 竖直渐近线的判定：首先 $f(x)$ 在 $x = a$ 处无定义，且当 $x \rightarrow a$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ (或 $-\infty$)，

那么称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的竖直渐近线

例如： $y = \log_2 x$ 在 $x = 0$ 处无定义，当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，所以 $x = 0$ 为 $y = \log_2 x$ 的一条渐近线。

综上所述：在作图时以下信息点值得通过计算后体现在图像中：与坐标轴的交点；对称轴与对称中心；极值点；渐近线。

例：作出函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的图像

分析：定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，

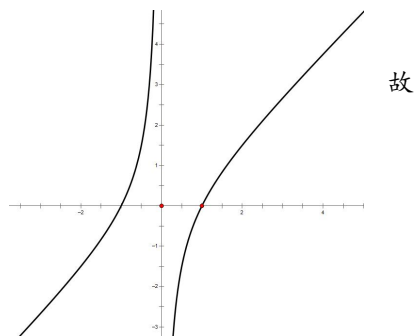
先考虑 x 正半轴情况。

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ 故函数单调递增，

$f''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$ ，故函数为上凸函数，当 $x \rightarrow +\infty$ 时，

$f(x) \rightarrow +\infty$ 无水平渐近线， $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，所以 y 轴为 $f(x)$ 的竖直渐近线。零

点：(1,0)，由这些信息可做出正半轴的草图，在根据对称性得到 $f(x)$ 完整图像：



2、函数图像变换：设函数 $y = f(x)$ ，其它参数均为正数

(1) 平移变换：

$f(x+a)$ ： $f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位

$f(x-a)$ ： $f(x)$ 的图像向右平移 a 个单位

$f(x)+b$ ： $f(x)$ 的图像向上平移 a 个单位

$f(x)-b$ ： $f(x)$ 的图像向下平移 a 个单位

(2) 对称变换：

$f(-x)$ ： 与 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

$-f(x)$ ： 与 $f(x)$ 的图像关于 x 轴对称