

普通高中课程标准选修课程用书

数学 D类

音乐中的数学



人民教育出版社

普通高中课程标准选修课程用书

数学 D类

音乐中的数学

人民教育出版社 课程教材研究所
普通高中课程标准选修课程用书数学编委会 编著

人民教育出版社

·北京·

前 言

《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称《课程标准（2017年版）》）设置了选修课程，供学校自主设定、学生自主选修。选修课程的宗旨是为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为学生的可持续发展创造条件，为大学选拔人才提供参考。

按照有志于学习数理类、经济社会和部分理工类、人文类、体育艺术类学生未来发展对数学知识的需要，《课程标准（2017年版）》分别设置了A、B、C、D类选修课程，并确定了相应的学习内容。

这几类课程的内容涉及范围非常广泛，许多课程无教学用书编写的先例可以借鉴，因此教学用书编写难度很大。课程标准修订组与人民教育出版社中学数学室几经商议，确定以课程标准修订组全体人员和人民教育出版社中学数学室部分人员组成本套用书编委会，于2017年7月启动了编写工作。编委会决定，以课程标准修订组成员为主、适当结合相关领域有较高造诣的专家和数学教育研究工作者组成编写队伍，按照《课程标准（2017年版）》设置的内容和要求进行编写。三年来，编委会和编写队伍多次讨论内容取舍、编写体例，主编、作者和责任编辑反复修改、校对书稿，现在本套用书终于陆续出版了。

本套用书大致有以下特点。

一是内容选取符合《课程标准（2017年版）》中选修课程的要求。本套用书的主要编写者均为课程标准修订组成员，他们能够很好地理解选修课程的设置宗旨、内容要求和结构体系，因此本套用书与《课程标准（2017年版）》设置的选修课程完全配套，并且涵盖A、B、C、D类课程的全部14个专题。特别值得一提的是，为了确定C、D类课程用书的具体内容，相关作者查阅了大量的资料，拜访了多位相关领域的专家，几经筛选和论证，最终确定了相对完整的内容体系。

二是内容表述符合高中生的认知特点。基于《课程标准（2017年版）》强调发展学生数学学科核心素养的基本理念，本套用书，特别是A、B类课程用书，力求在内容表述的过程中渗透数学的基本思想，帮助学生建立数学直观。对于新概念、新方法的引入，注意设计合适的情境、提出合适的问题，让学生理解引入这些概念和方法的必要性，感悟数学的抽象和表达的过程；对于定理和命题的述说，在严格论证的基础上，努力通过一些特例阐明结论的数学意义和现实意义，帮助学生直观感悟数学的本质，感悟数学知识之间的关联。希望学生通过这样的学习，能够在掌握知识技能的同时，积累学习数学的经验。

三是注意教学用书与科普读物的区别。编委会和编写队伍达成基本共识，就是内容的呈现要坚持教学用书的形态，特别是C、D类课程用书。虽然内容的述说要做到通俗易懂，但一定要让学生在学的过程中，感悟数学作为应用工具，在人文、社会、体育、艺术中的作用；感悟数学作为特殊语言，在表达事物的概念、关系和规律的过程中所表现出来的简洁性与准确性。这样的感悟将会使学生终身受益。

综上所述，本套用书可以作为普通高中选修课程的教学用书，学生可以根据自己的志向和兴趣选择其中的某些课程。基于内容的选取和表述的形式，本套用书还可以作为大专院校人文、社会、体育、艺术类学科有关课程的教学用书。

本套用书中有些专题首次以教学用书的形式出现，不妥之处在所难免，希望读者提出改进的意见与建议。

编委会
2021年1月

编者的话

说起数学与音乐，有人认为两者好像互不搭界：一个侧重抽象思维，一个侧重形象思维；一个属理，一个姓文。隔得远哩！

其实，数学与音乐有着紧密的关联。有人说得好，人类有两种抽象的、高级的语言，这就是数学和音乐。如果仅从语言角度看，其实不难看到这两种语言所具有的共同特点，例如，它们都是符号化的，它们都需要借助数字来表达，而且这两种语言在一些表达方式上都是各国通用的，如数学公式、五线谱等。

我们还需要从更深入一点的角度来认识两者之间的联系。

《音乐中的数学》就是希望你提供一个从数学上去“看”音乐的视角。通过学习，不仅能开阔你的数学视野，还能让你借助数学独有的眼光、思维、方法，去探究、认识音乐的规律，更加理性地理解音乐、鉴赏音乐的美，感受音乐的魅力，以提升自己的音乐素养。

本专题将为同学们提供五个方面的学习内容：

一是运用正弦函数这一数学工具，来探讨乐音的基本要素。你会看到数学为认识这些基本要素提供了最为科学的分析。这一部分内容也是你学习后续内容的基础。

二是从音乐律制历史溯源的角度，介绍迄今仍卓有影响的几种律制的产生及特点，重点探究在乐音体系中，人们是如何通过运用数学方法来确定各音的音高、构成音阶及其相互关系，从而形成各种音律规则的。你会看到音乐从开始构建自己的规则起就与数学结下了不解之缘。

三是运用数学的知识分析音乐节拍及节奏变化的特点及规律。音乐的节奏是靠乐音的时长、周期、音强等要素构建的，这些要素集中反映在音乐的节拍上。如果说音阶表现的是乐音的纵向维度的话，节奏表现的则是乐音的横向维度。因此在这一部分我们也适时地把五线谱视为数学中的平面直角坐标系，从而为学习后续内容提供分析工具。

四是综合运用数学的一些概念、原理，结合丰富的实例，讨论音乐作品的结构特点和几种旋律的发展手法。例如，用小整数比探讨和弦，用黄金分割、斐波那契数列探讨音乐作品的结构，用数学变换研究发展旋律的一些手法，用图形直观讨论旋律线的各种变化，等等。

最后一部分介绍乐器中的数学。你会从键盘乐器、弦乐器、管乐器以及电声乐器的制作、构造及发声功能角度探究其中的数学原理。

上述所有内容都是根据《普通高中数学课程标准（2017年版）》的要求编写的。

愿《音乐中的数学》能成为你学习中的新朋友！

目录

第一章 声波与正弦函数

1.1 乐音的基本要素	2
1.2 傅里叶定理——为人们认识乐音性质提供数学工具	4
1.3 对乐音基本要素的数学分析	6
1.4 正弦函数——构成各种美妙音乐的数学基因	9
阅读材料 傅里叶及数学家们对乐音本质的探索	12

第二章 音阶、律制与数列

2.1 音阶与律制	15
2.2 三分损益法与五声调式	17
2.3 五度相生律与纯律	22
阅读材料 毕达哥拉斯学派与琴弦的实验	24
2.4 十二平均律与等比数列	26
阅读材料 明朝律学家朱载堉	28
2.5 对弦的振动的研究	29
阅读材料 从几篇历史文献看我国古代对音律算法的贡献	32

第三章 音乐的节奏与数学

3.1 音符、节拍与分数	36
3.2 节拍的强弱与周期性	43
3.3 复节奏与公倍数、公因数	45
阅读材料 演奏复杂节奏的鼓和其他打击乐器	47
3.4 节奏变化与排列组合	48
3.5 五线谱与平面直角坐标系	50
阅读材料 《击掌音乐》的节奏分析	52

第四章 乐曲中的数学

4.1 和弦与小整数比	55
4.2 乐曲的结构与黄金分割	58
4.3 乐曲中的斐波那契数列	66
阅读材料 斐波那契螺旋线	70
4.4 乐曲中的数学变换	72