2024 年江苏省南京市田家炳中学高考数学考前模拟试卷

一、单项选择题

1. 已知 $x^2 \in \{1, 0, x\}$, 则实数 x 的值为 ()

A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1
2. 已知复数 z 满足 $5z - 3 = 4(1 - 3z)i$, 则 $|\bar{z}| =$ ()

A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{10}{13}$ C. $\frac{5}{17}$ D. $\frac{8}{17}$
3. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为单位向量, 且 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角大小为 ()

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π
4. 设 α , β 是两个平面, m , n 是两条直线, 则下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, $m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$

B. 若 $m // \alpha$, $m // \beta$, $\alpha \cap \beta = n$, 则 $m // n$

C. 若 $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $m // \beta$, $n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$

D. 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, 则 $n // \alpha$
5. $(3 - 2x^3)(x+a)^5$ 的展开式中的各项系数和为 243, 则该展开式中 x^4 的系数为 ()

A. -130 B. 46 C. 61 D. 190
6. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $-a_1, S_2, S_3$ 成等差数列. 若存在两项 $a_m, a_n (m, n \in \mathbb{N}^*)$ 使得 $\sqrt{a_m \cdot a_n} = 8a_1$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{9}{n}$ 的最小值是 ()

A. 16 B. 2 C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{8}{3}$
7. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
8. 关于 x 的不等式 $ax - 2a > 2x - \ln x - 4$ 的解集中有且仅有两个整数, 则正实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\ln 3, 2)$ B. $[2 - \ln 3, 2)$ C. $(0, 2 - \ln 3]$ D. $(0, 2 - \ln 3)$

二、多选题

(多选) 9. 已知复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $z^2 = |z|^2$

B. $\overline{z+z}$ 一定是实数

C. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. 则 $z_1 \cdot z_2=0$

D. 若复数 z 的平方是纯虚数, 则复数 z 的实部和虚部相等或者互为相反数

(多选) 10. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 一组数据 5, 8, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22 的第 80 百分位数为 18

B. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 6) = 0.84$, 则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$

C. 袋中装有除颜色外完全相同的 4 个红球和 2 个白球, 从袋中不放回地依次抽取 2 个球, 记事件 $A =$ 第一次抽到的是白球, 事件 $B =$ 第二次抽到的是白球, 则 $P(B|A) = \frac{1}{3}$

D. 设随机事件 A, B , 已知 $P(A) = 0.4, P(B|A) = 0.3, P(B|\overline{A})$, 则 $P(B) = 0.24$

(多选) 11. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, 过焦点 F 且倾斜角为 θ 的直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点 (点 M 在第二象限), 当 $\theta = 30^\circ$ 时, $|MF| = 2$, 则下列说法正确的是 ()

A. $p = 3$

B. $\triangle MON$ 的面积的最小值为 $\frac{9}{2}$

C. 存在直线 l , 使得 $\angle OMF + \angle ONF > 90^\circ$

D. 分别过点 M, N 且与抛物线相切的两条直线互相垂直

三、填空题

12. 若曲线 $y = x^3 + 3ax + 16$ 与 x 轴相切, 则实数 a 的值是 _____.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则满足 $S_{n^2} = (S_n)^2$ 的数列 $\{a_n\}$ 的一个通项 $a_n =$ _____. (写出一个正确的答案即可, 不必考虑所有情况)

14. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 满足 $\cos 2A - \cos 2B = 2\sin C (\sin B - \sin C)$, 则 $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值为 _____.

四、解答题

15. 在凸四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = AD, AB \perp AD, BC = 4, CD = 2$.

(1) 若 $\cos \angle BCD = \frac{1}{4}$, 求 $\sin \angle ABC$ 的值;

(2) 求四边形 $ABCD$ 面积 S 的最大值.

16. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD, AD \parallel BC, AB = AD = AC = 3, PA = BC = 4, M, N$ 分别为线段 AD, PC 上一点, $AM = 2MD$.

(1) 若 N 为 PC 的中点, 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB ;