微专题 30 函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 解析式的求解

在有关三角函数的解答题中，凡涉及到 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的性质时，往往表达式不直接给出，而是需要利用已知条件化简或求得 A,ω,φ 得到，本讲主要介绍求解 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 解析式的一些技巧和方法

一、基础知识：

（一）表达式的化简：

1、所涉及的公式（要熟记，是三角函数式变形的基础）

（1）降幂公式：$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2},\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

（2）$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$

（3）两角和差的正余弦公式

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

（4）合角公式：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$（这是本讲的主角，也是化简的终结技）

2、关于合角公式：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right)$ 的说明书：

（1）使用范围：三个特点：① 同角（均为 α），②齐一次，③正余全

（2）操作手册：如果遇到了符合以上三个条件的式子，恭喜你，可以使用合角公式将其化为 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的形式了，通过以下三步：

①一提：提取系数：$\sqrt{a^2+b^2}$，表达式变为：

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

② 二找：由 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$，故可看作同一个角的正余弦（称 φ 为辅助角），如 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，可得：

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha\right)$$

③ 三合：利用两角和差的正余弦公式进行合角：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right)$

（3）举例说明：

$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

① $y=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

② $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow y=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$

③ $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

（4）注意事项：

① 在找角的过程中，一定要找“同一个角”的正余弦，因为合角的理论基础是两角和差的正余弦公式，所以构造的正余弦要同角

② 此公式不要死记硬背，找角的要求很低，只需同一个角的正余弦即可，所以可以从不同的角度构造角，从而利用不同的公式进行合角，例如上面的那个例子：

$y=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$，可视为$\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$，那么此时表达式就变为：

$y=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)$，使用两角差的余弦公式：$y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

所以，找角可以灵活，不必拘于结论的形式。**找角灵活，也要搭配好对应的三角函数公式。**

当然，角寻找的不同，自然结果形式上也不一样，但$y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$与$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$本质是同一个式子（为什么？想想诱导公式的作用~）

③ 通常遇到的辅助角都是常见的特殊角，这也为我们的化简提供了便利，如果提完系数发现括号里不是特殊角的正余弦，那么可用抽象的φ来代替，再在旁边标注φ的一个三角函数值。

3、表达式的化简攻略：

可化简的表达式多种多样，很难靠列举一一道明，化简往往能够观察并抓住式子的特点来进行操作，所以说几条适用性广的建议：

（1）观察式子：主要看三点

① 系统：整个表达式是以正余弦为主，还是正切（大多数情况是正余弦），确定后进行项的统一（有句老话：切割化弦）

② 确定研究对象：是以x作为角来变换，还是以x的表达式（例如$2x$）看做一个角来进行变换。

③ 式子是否齐次：看每一项（除了常数项）的系数是否一样（合角公式第二条：齐一次），若是同一个角（之前不是确定了研究对象了么）的齐二次式或是齐一次式，那么很有可能要使用合角公式，其结果成为$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$的形式。例如：