微专题32 解三角形中的不等问题

一、基础知识：

1、正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中$R$为$\triangle ABC$外接圆的半径

正弦定理的主要作用是方程和分式中的边角互化。其原则为关于边，或是角的正弦值是否具备齐次的特征。如果齐次则可直接进行边化角或是角化边，否则不可行

例如：（1）$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin A\sin B=\sin^2 C \Leftrightarrow a^2+b^2-ab=c^2$

（2）$b\cos C+c\cos B=a \Rightarrow \sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A$（恒等式）

（3）$\dfrac{bc}{a^2}=\dfrac{\sin B\sin C}{\sin^2 A}$

2、余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

变式：$a^2=\left(b+c\right)^2-2bc\left(1+\cos A\right)$ 此公式在已知a,A的情况下，配合均值不等式可得到$b+c$和bc的最值

3、三角形面积公式：

（1）$S=\dfrac{1}{2}a\cdot h$ （a为三角形的底，h为对应的高）

（2）$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$

（3）$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C$ （其中R为外接圆半径）

4、三角形内角和：$A+B+C=\pi$，从而可得到：

（1）正余弦关系式：$\sin A=\sin\left[\pi-\left(B+C\right)\right]=\sin\left(B+C\right)$

$$\cos A=\cos\left[\pi-\left(B+C\right)\right]=-\cos\left(B+C\right)$$

（2）在已知一角的情况下，可用另一个角表示第三个角，达到消元的目的

5、两角和差的正余弦公式：

$$\sin\left(A\pm B\right)=\sin A\cos B\pm\sin B\cos A$$

$$\cos\left(A\pm B\right)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

6、辅助角公式：$a\sin A+b\cos B=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(A+\varphi\right)$，其中$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$

7、三角形中的不等关系

（1）任意两边之和大于第三边：在判定是否构成三角形时，只需验证较小的两边之和是否比第三边大即可。由于不存在等号成立的条件，在求最值时使用较少

（2）在三角形中，边角以及角的三角函数值存在等价关系：

$$a>b \Leftrightarrow A>B \Leftrightarrow \sin A>\sin B \Rightarrow \cos A<\cos B$$

其中由$A>B \Leftrightarrow \cos A<\cos B$利用的是余弦函数单调性，而$A>B \Leftrightarrow \sin A>\sin B$仅在一

个三角形内有效。

8、解三角形中处理不等关系的几种方法

（1）转变为一个变量的函数：通过边角互化和代入消元，将多变量表达式转变为函数，从而将问题转化为求函数的值域

（2）利用均值不等式求得最值

二、例题精析：

例 1：$\triangle ABC$ 各角的对应边分别为 a,b,c，满足 $\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq 1$，则角 A 的范围是_______

A．$(0,\frac{\pi}{3}]$　　B．$(0,\frac{\pi}{6}]$　　C．$[\frac{\pi}{3},\pi)$　　D．$[\frac{\pi}{6},\pi)$

思路：从所给条件入手，进行不等式化简：$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq 1$

$\Rightarrow b\left(a+b\right)+c\left(a+c\right)\geq\left(a+c\right)\left(a+b\right)\Rightarrow b^2+c^2\geq a^2+bc$，观察到余弦定理公式特征，进而利用余弦定理表示 $\cos A$：$b^2+c^2\geq a^2+bc\ \Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\frac{1}{2}$，可解得：

$A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$

答案：A

例 2：在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}=\frac{c}{\sin C}$

（1）求 A 的大小

（2）若 $a=6$，求 $b+c$ 的取值范围

解：（1）由条件 $\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}=\frac{c}{\sin C}$ 可考虑使用正弦定理，将分子进行“边化角”

$$\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow\frac{\sin A}{\sqrt{3}\cos A}=\frac{\sin C}{\sin C}=1\qquad\therefore\tan A=\sqrt{3}$$

$$\therefore A=\frac{\pi}{3}$$

（2）思路：考虑在 $\triangle ABC$ 中，已经已知 $A,\ a$，从而可求出外接圆半径 R，进而 B,C 与 b,c 也可进行边角互化。若从边的角度考虑，则能够使用的不等关系只有“两边之和大于第三边”，但不易利用 $A=60^\circ$ 这个条件，考虑利用角来解决

解：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=4\sqrt{3}$

$\therefore b=4\sqrt{3}\sin B,\ \ c=4\sqrt{3}\sin C\qquad\because A=\frac{\pi}{3}\ \ \therefore B+C=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow C=\frac{2\pi}{3}-B$