

微专题 42 利用函数性质与图像比较大小

一、基础知识：

（一）利用函数单调性比较大小

1、函数单调性的作用： $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增，则

$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (在单调区间内，单调性是自变量大小关系与函数值大小关系的桥梁)

2、导数运算法则：

$$(1) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(2) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

3、常见描述单调性的形式

(1) 导数形式： $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递增； $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递减

(2) 定义形式： $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ：表示函数值的差与

对应自变量的差同号，则说明函数单调递增，若异号则说明函数单调递减

4、技巧与方法：

(1) 此类问题往往条件比较零散，不易寻找入手点。所以处理这类问题要将条件与结论结合着分析。在草稿纸上列出条件能够提供什么，也列出要得出结论需要什么。两者对接通常可以确定入手点

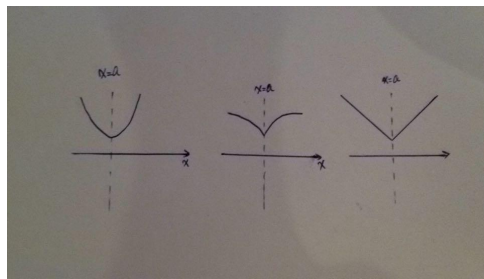
(2) 在构造函数时要根据条件的特点进行猜想，例如出现轮流求导便猜有可能是具备乘除关系的函数。在构造时多进行试验与项的调整

(3) 在比较大小时，通常可利用函数性质（对称性，周期性）将自变量放入至同一单调区间中进行比较

（二）数形结合比较大小

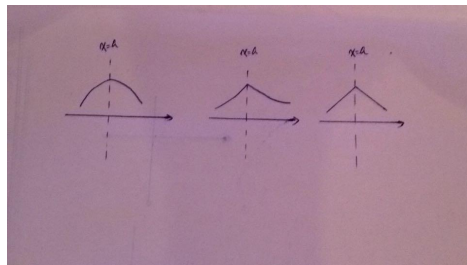
1、对称性与单调性：若已知单调性与对称性，则可通过作出草图观察得到诸如“距轴越近，函数值越……”的结论，从而只需比较自变量与坐标轴的距离，即可得到函数值的大小关系

(1) 若 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称，且 $(a, +\infty)$ 单调



增，则图像可能以下三种情况，可发现一个共同点：自变量距离轴越近，其函数值越小

(2) 若 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称，且 $(a, +\infty)$ 单调减，则图像可能以下三种情况，可发现一个共同点：自变量距离轴越近，其函数值越大



2、函数的交点：如果所比较的自变量是一些方程的解，则可将方程的根视为两个函数的交点。抓住共同的函数作为突破口，将其余函数的图像作在同一坐标系下，观察交点的位置即可判断出自变量的大小

三、例题精析：

例 1：对于 R 上可导的任意函数 $f(x)$ ，若满足 $\frac{2-x}{f'(x)} \leq 0$ ，则必有 ()

A. $f(1)+f(3) < 2f(2)$

B. $f(1)+f(3) \leq 2f(2)$

C. $f(1)+f(3) > 2f(2)$

D. $f(1)+f(3) \geq 2f(2)$

思路：由 $\frac{2-x}{f'(x)} \leq 0$ 可按各项符号判断出 $(2-x)$ 与 $f'(x)$ 异号，即 $x < 2$ 时，

$f'(x) < 0$ ， $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 单调递减，在 $(2, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore f(x)_{\min} = f(2)$ ，进而 $f(1) > f(2), f(3) > f(2)$ $\therefore f(1)+f(3) > 2f(2)$

答案：C

小炼有话说：相乘因式与零比较大小时，可分别判断每一个因式的符号，再判断整个式子的符号。这样做可以简化表达式的运算。

例 2：已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \neq 0$ 时， $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0$ ，