微专题36 向量的数量积——寻找合适的基底

在高考中经常会遇到几何图形中计算某两个向量$\vec{a},\vec{b}$数量积的问题，如果无法寻找到计算数量积的要素（$\vec{a},\vec{b}$模长，夹角）那么可考虑用合适的两个向量（称为基底）将$\vec{a},\vec{b}$两个向量表示出来，进而进行运算。这也是在几何图形中处理向量数量积的一个重要方法

一、基础知识：

（一）所涉及的平面向量定理及数量积运算法则：

1、平面向量基本定理：若向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$为两个不共线的向量，那么对于平面上任意的一个向量$\vec{a}$，均存在唯一一对实数$\lambda_1,\lambda_2$，使得$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$。其中$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$成为平面向量的一组基底。（简而言之，不共线的两个向量可以表示所有向量）

2、向量数量积运算$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta$，其中$\theta$为向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角

3、向量夹角的确定：向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角θ指的是将$\vec{a},\vec{b}$的起点重合所成的角，$\theta\in\left[0,\pi\right]$

其中$\theta=0$：同向　　$\theta=\pi$：反向　　$\theta=\frac{\pi}{2}$：$\vec{a}\perp\vec{b}$

4、数量积运算法则：

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

（2）系数结合律：$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)\left(\lambda\in R\right)$

（3）分配律：$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

因为向量数量积存在交换律与分配律，才使得有些向量数量积运算的展开式与实数因式相乘的展开式规律相同：

例如：$\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$　　$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

5、若$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2},\vec{b}=\mu_1\overrightarrow{e_1}+\mu_2\overrightarrow{e_2}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\left(\mu_1\overrightarrow{e_1}+\mu_2\overrightarrow{e_2}\right)=\lambda_1\mu_1\overrightarrow{e_1}^2+\lambda_2\mu_2\overrightarrow{e_2}^2+\left(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1\right)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}$$

由此可见，只要知道基底的模与数量积，以及将$\vec{a},\vec{b}$用基底表示出来，则可计算$\vec{a}\cdot\vec{b}$

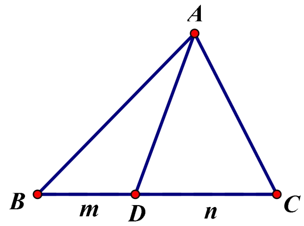
（二）选择合适基底解题的步骤与技巧：

1、如何选择“合适”的基底：题目中是否有两个向量模长已知，数量积可求呢？如果有，那就是它们了。所以**在此类题目中首先可先确定那些向量的数量积与模长已知。**常见的可以边

所成向量作基底的图形有：等边三角形，已知两边的直角三角形，矩形，特殊角的菱形等。

2、向量的表示：尝试所求数量积的两个向量是否能被你所选中的基底进行表示，常用的方法有：

（1）向量的加减运算

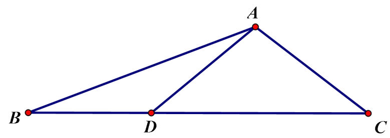


（2）“爪”字型图：在$\triangle ABC$中，D是BC上的点，如果$\left|BD\right|:\left|CD\right|=m:n$，则$\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$，其中$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$知二可求一。特别的，如果$AD$是$BC$边上的中线，则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

3、计算数量积：将所求向量用基地表示后，代入到所求表达式计算即可，但在计算过程中要注意基底的夹角

二、例题精炼

例 1:如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120^\circ,AB=2,AC=1,D$是边$BC$上一点，$DC=2BD$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______________

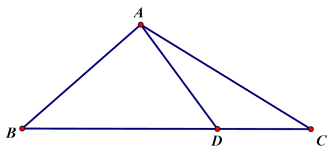


思路：$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$模长未知（$\left|\overrightarrow{BC}\right|$尚可求出），夹角未知，所以很难直接求出数量积。考虑是否有合适基底，$\angle BAC=120^\circ,AB=2,AC=1$，可计算出$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos120^\circ=-1$，进而对于$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$，模长均已知，数量积已求，条件齐备，适合作为基底。用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

$$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2=-\frac{8}{3}$$

答案：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{8}{3}$

例 2：如图，已知在$\triangle ABC$中，$AD\perp AB,\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD},\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$______



思路：观察条件，$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$很难直接利用公式求解. 考虑选择两个向量表示$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$，条件中$AD\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$（**数量积有了**），$\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$（**模长有了**），所以考虑用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$作为