

微专题 29 图像变换在三角函数中的应用

在高考中涉及到的三角函数图像变换主要指的是形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的函数，通过横纵坐标的平移与放缩，得到另一个三角函数解析式的过程。要求学生熟练掌握函数图像变换，尤其是多次变换时，图像变化与解析式变化之间的对应联系。

一、基础知识：

（一）图像变换规律：设函数为 $y = f(x)$ （所涉及参数均为正数）

1、函数图像的平移变换：

（1） $f(x+a)$ ： $f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位

（2） $f(x-a)$ ： $f(x)$ 的图像向右平移 a 个单位

（3） $f(x)+b$ ： $f(x)$ 的图像向上平移 b 个单位

（4） $f(x)-b$ ： $f(x)$ 的图像向下平移 b 个单位

2、函数图像的放缩变换：

（1） $f(kx)$ ： $f(x)$ 的图像横坐标变为原来的 $\frac{1}{k}$ （图像表现为横向的伸缩）

（2） $kf(x)$ ： $f(x)$ 的图像纵坐标变为原来的 k 倍（图像表现为纵向的伸缩）

3、函数图像的翻折变换：

（1） $f(|x|)$ ： $f(x)$ 在 x 轴正半轴的图像不变，负半轴的图像替换为与正半轴图像关于 y 轴对称的图像

（2） $|f(x)|$ ： $f(x)$ 在 x 轴上方的图像不变， x 轴下方的部分沿 x 轴向上翻折即可（与原 x 轴下方图像关于 x 轴对称）

（二）图像变换中要注意的几点：

1、如何判定是纵坐标变换还是横坐标变换？

在寻找到联系后可根据函数的形式了解变换所需要的步骤，其规律如下：

① 若变换发生在“括号”内部，则属于横坐标的变换

② 若变换发生在“括号”外部，则属于纵坐标的变换

例如： $y = f(3x+1)$ ：可判断出属于横坐标的变换：有放缩与平移两个步骤

$y = f(-x)+2$ ：可判断出横纵坐标均需变换，其中横坐标的为对称变换，纵坐标的为平移变换

2、解析式变化与图像变换之间存在怎样的对应？由前面总结的规律不难发现：

（1）加“常数” $\Leftrightarrow$ 平移变换

（2）添“系数” $\Leftrightarrow$ 放缩变换

（3）加“绝对值” $\Leftrightarrow$ 翻折变换

3、多个步骤的顺序问题：在判断了需要几步变换以及属于横坐标还是纵坐标的变换后，在安排顺序时注意以下原则：

- ① 横坐标的变换与纵坐标的变换互不影响，无先后要求
- ② 横坐标的多次变换中，每次变换只有 x 发生相应变化

例如： $y = f(x) \rightarrow y = f(2x+1)$ 可有两种方案

方案一：先平移（向左平移 1 个单位），此时 $f(x) \rightarrow f(x+1)$ 。再放缩（横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ ），此时系数 2 只是添给 x ，即 $f(x+1) \rightarrow f(2x+1)$

方案二：先放缩（横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ ），此时 $f(x) \rightarrow f(2x)$ ，再平移时，若平移 a 个单位，则 $f(2x) \rightarrow f(2(x+a)) = f(2x+2a)$ （只对 x 加 a ），可解得 $a = \frac{1}{2}$ ，故向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

- ③ 纵坐标的多次变换中，每次变换将解析式看做一个整体进行

例如： $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x)+1$ 有两种方案

方案一：先放缩： $y = f(x) \rightarrow y = 2f(x)$ ，再平移时，将解析式看做一个整体，整体加 1，即 $y = 2f(x) \rightarrow y = (2f(x))+1$

方案二：先平移： $y = f(x) \rightarrow y = f(x)+1$ ，则再放缩时，若纵坐标变为原来的 a 倍，那么 $y = f(x)+1 \rightarrow y = a(f(x)+1)$ ，无论 a 取何值，也无法达到 $y = 2f(x)+1$ ，所以需要调整：平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，再进行放缩即可（ $a = 2$ ）

二、典型例题：

例 1：要得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需要将函数 $y = \sin 2x$ 的图像（ ）

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
- C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
- D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

思路：观察发现原始函数与变换后的函数仅仅多一个常数，说明只有平移变换，在变换的过程中要注意只有含 x 的地方进行了变化，所以只有 $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，所以是

向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

答案：C

小炼有话说：（1）图像变换要注意区分哪个是原始函数，哪个是变化后的函数。