

微专题 15 函数的单调区间

单调性是函数的一个重要性质，对函数作图起到决定性的作用，而导数是分析函数单调区间的一个便利工具。求一个已知函数的单调区间是每一个学生的必备本领，在求解的过程中也要学会一些方法和技巧。

一、基础知识：

1、函数的单调性：设 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subseteq D$ ，若对于 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递增， I 称为单调递增区间。若对于 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ，有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递减， I 称为单调递减区间。

2、导数与单调区间的联系

(1) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导，那么 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增 $\Rightarrow \forall x \in (a, b), f'(x) \geq 0$

此结论可以这样理解：对于递增的函数，其图像有三种类型：，无论是哪种图形，其上面任意一点的切线斜率均大于零。

等号成立的情况：一是单调区间分界点导数有可能为零，例如： $f(x) = x^2$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$ ，而 $f'(0) = 0$ ，另一种是位于单调区间内但导数值等于零的点，典型的一个例子为 $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处的导数为 0，但是 $(0, 0)$ 位于单调区间内。

(2) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递减 $\Rightarrow \forall x \in (a, b), f'(x) \leq 0$

(3) 前面我们发现了函数的单调性可以决定其导数的符号，那么由 $\forall x \in (a, b), f'(x)$ 的符号能否推出 $f(x)$ 在 (a, b) 的单调性呢？如果 $f(x)$ 不是常值函数，那么便可由导数的符号对应推出函数的单调性。（这也是求函数单调区间的理论基础）

3、利用导数求函数单调区间的步骤

(1) 确定函数的定义域

(2) 求出 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$

(3) 令 $f'(x) > 0$ （或 < 0 ），求出 x 的解集，即为 $f(x)$ 的单调增（或减）区间

(4) 列出表格

4、求单调区间的一些技巧

(1) 强调先求定义域，一方面定义域对单调区间有限制作用（**单调区间为定义域的子集**）。

另一方面通过定义域对 x 取值的限制，对解不等式有时会起到简化的作用，方便单调区间的求解

(2) 在求单调区间时优先处理恒正恒负的因式，以简化不等式

(3) 一般可令 $f'(x) > 0$ ，这样解出的解集就是单调增区间（方便记忆），若 $f(x)$ 不存在常值函数部分，那么求减区间只需要取增区间在定义域上的补集即可（简化求解的步骤）

(4) 若 $f'(x) > 0$ 的解集为定义域，那么说明 $f(x)$ 是定义域上的增函数，若 $f'(x) > 0$ 的解集为 $\emptyset$ ，那么说明没有一个点切线斜率大于零，那么 $f(x)$ 是定义域上的减函数

(5) 导数只是求单调区间的一个有力工具，并不是唯一方法，以前学过的一些单调性判断方法也依然好用，例如：增+增→增，减+减→减， $(-1) \times$ 增→减，复合函数单调性同增异减等。如果能够通过结论直接判断，那么就无需用导数来判定。

5、求单调区间的一些注意事项

(1) 单调区间可以用开区间来进行表示，如果用闭区间那么必须保证边界值在定义域内。例如函数 $y = \frac{1}{x}$ 的单调减区间为 $(0, +\infty), (-\infty, 0)$ ，若写成 $[0, +\infty)$ 就出错了（0 不在定义域内）

(2) 如果增（或减）区间有多个，那么在书写时用逗号隔开，一定不要用并集 $\cup$ 的符号。有些同学觉得不等式的解集是多个部分时用“ $\cup$ ”连接，那么区间也一样，这个观点是错误的。并集是指将两个集合的元素合并到一起成为一个集合，用在单调区间上会出现问题。依然以 $y = \frac{1}{x}$ 为例，如果写成 $(0, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ ，那么就意味着从合并在一起的集合中任取两个变量，满足单调减的条件。由 $y = \frac{1}{x}$ 性质可知，如果在 $(0, +\infty), (-\infty, 0)$ 两个区间里各取一个，是不满足单调减的性质的。

6、二阶导函数的作用：

①几何意义：导数的符号决定原函数的单调性，对于 $f''(x)$ 而言，决定的是 $f'(x)$ 的单调性。

当 $f''(x) > 0$ 时， $f'(x)$ 单调递增，意味着 $f'(x)$ 随 x 的增大而增大，由于导数的几何意义为切线斜率，故切线斜率 k 随 x 的增大而增大；同理，当 $f''(x) < 0$ 时， $f'(x)$ 单调递减，则切线斜率 k 随 x 的增大而减少。那么在图像上起到什么作用呢？

单调增有三种： 其不同之处在于切线斜率随自变量变大的变化不

