微专题 35 形如 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 条件的应用

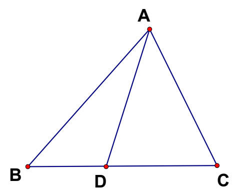
一、基础知识：

1、平面向量基本定理：若平面上两个向量 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 不共线，则对平面上的任一向量 $\vec{a}$，均存在唯一确定的 (λ_1,λ_2)，（其中 $\lambda_1,\lambda_2\in R$），使得 $\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$。其中 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 称为平面向量的一组基底。

（1）不共线的向量即可作为一组基底表示所有的向量

（2）唯一性：若 $\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$ 且 $\vec{a}=\mu_1\overrightarrow{e_1}+\mu_2\overrightarrow{e_2}$，则 $\begin{cases}\lambda_1=\mu_1\\ \lambda_2=\mu_2\end{cases}$

2、"爪"字型图及性质：



（1）已知 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为不共线的两个向量，则对于向量 $\overrightarrow{AD}$，必存在 x,y，使得 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$。则 B,C,D 三点共线 $\Leftrightarrow x+y=1$

当 $0<x+y<1$，则 D 与 A 位于 BC 同侧，且 D 位于 A 与 BC 之间

当 $x+y>1$，则 D 与 A 位于 BC 两侧

$x+y=1$ 时，当 $x>0,y>0$，则 D 在线段 BC 上；当 $xy<0$，则 D 在线段 BC 延长线上

（2）已知 D 在线段 BC 上，且 $|BD|:|CD|=m:n$，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

3、$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 中 x,y 确定方法

（1）在几何图形中通过三点共线即可考虑使用"爪"字型图完成向量的表示，进而确定 x,y

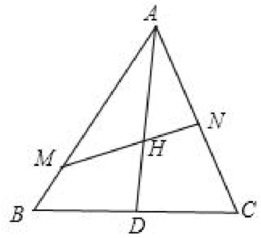
（2）若题目中某些向量的数量积已知，则对于向量方程 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，可考虑两边对同一向量作数量积运算，从而得到关于 x,y 的方程，再进行求解

（3）若所给图形比较特殊（矩形，特殊梯形等），则可通过建系将向量坐标化，从而得到关于 x,y 的方程，再进行求解

二、典型例题：

例 1：在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边的中点，H 为 AD 的中点，过点 H 作一直线 MN 分别交 AB,AC 于点 M,N，若 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，则 $x+4y$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{9}{4}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1



思路：若要求出 $x+4y$ 的最值，则需从条件中得到 x,y 的关系。

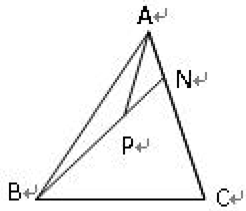
由 M,H,N 共线可想到“爪”字型图，所以 $\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，其中 $m+n=1$，下面考虑将 m,n 的关系转为 x,y 的关系。利用条件中的向量关系：$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ 且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，所以 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，因为 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AH}=mx\overrightarrow{AB}+ny\overrightarrow{AC}$，由平面向量基本定理可得：$\begin{cases} mx=\frac{1}{4} \\ ny=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{4x} \\ n=\frac{1}{4y} \end{cases}$，所以 $m+n=1\Rightarrow \frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}=1$，所以

$x+4y=\left(x+4y\right)\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}\right)=\frac{1}{4}\left(1+4+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\right)$，而 $\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4$，所以 $x+4y\ge\frac{9}{4}$

答案：A

例 2：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$P$ 是 BN 上的一点，若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$，则实数 m 的值为（　　）

A. $\frac{9}{11}$　　B. $\frac{5}{11}$　　C. $\frac{3}{11}$　　D. $\frac{2}{11}$



思路：观察到 B,P,N 三点共线，利用“爪”字型图，可得 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AN}$，且 $m+n=1$，由 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$ 可得 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}n\overrightarrow{AC}$，由已知 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$ 可得：$\frac{1}{4}n=\frac{2}{11}\Rightarrow n=\frac{8}{11}$，所以 $m=\frac{3}{11}$

答案：C

例 3：在平面内，已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1,\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\angle AOC=30^\circ$，设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB},\left(m,n\in R\right)$，则 $\frac{m}{n}$ 等于（　　）

A. $\pm\sqrt{3}$　　B. ± 3　　C. $\pm\frac{1}{3}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$