

普通高中课程标准选修课程用书

数学 D 类

美与数学



师书邦 (江苏题库) www.shishubang.com 教师备课和学生学习的资源平台!

人民教育出版社

普通高中课程标准选修课程用书

数学 D 类

美与数学

人民教育出版社 课程教材研究所
普通高中课程标准选修课程用书数学编委会 编著

人民教育出版社

· 北京 ·

前言

《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称《课程标准（2017年版）》）设置了选修课程，供学校自主设定、学生自主选修。选修课程的宗旨是为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为学生的可持续发展创造条件，为大学选拔人才提供参考。

按照有志于学习数理类、经济社会和部分理工类、人文类、体育艺术类学生未来发展对数学知识的需要，《课程标准（2017年版）》分别设置了A、B、C、D类选修课程，并确定了相应的学习内容。

这几类课程的内容涉及范围非常广泛，许多课程无教学用书编写的先例可以借鉴，因此教学用书编写难度很大。课程标准修订组与人民教育出版社中学数学室几经商议，确定以课程标准修订组全体人员和人民教育出版社中学数学室部分人员组成本套用书编委会，于2017年7月启动了编写工作。编委会决定，以课程标准修订组成员为主、适当结合相关领域有较高造诣的专家和数学教育研究者组成编写队伍，按照《课程标准（2017年版）》设置的内容和要求进行编写。三年来，编委会和编写队伍多次讨论内容取舍、编写体例，主编、作者和责任编辑反复修改、校对书稿，现在本套用书终于陆续出版了。

本套用书大致有以下特点。

一是内容选取符合《课程标准（2017年版）》中选修课程的要求。本套用书的主要编写者均为课程标准修订组成员，他们能够很好地理解选修课程的设置宗旨、内容要求和结构体系，因此本套用书与《课程标准（2017年版）》设置的选修课程完全配套，并且涵盖A、B、C、D类课程的全部14个专题。特别值得一提的是，为了确定C、D类课程用书的具体内容，相关作者查阅了大量的资料，拜访了多位相关领域的专家，几经筛选和论证，最终确定了相对完整的内容体系。

二是内容表述符合高中生的认知特点。基于《课程标准（2017年版）》强调发展学生数学学科核心素养的基本理念，本套用书，特别是A、B类课程用书，力求在内容表述的过程中渗透数学的基本思想，帮助学生建立数学直观。对于新概念、新方法的引入，注意设计合适的情境、提出合适的问题，让学生理解引入这些概念和方法的必要性，感悟数学的抽象和表达的过程；对于定理和命题的述说，在严格论证的基础上，努力通过一些特例阐明结论的数学意义和现实意义，帮助学生直观感悟数学的本质，感悟数学知识之间的关联。希望学生通过这样的学习，能够在掌握知识技能的同时，积累学习数学的经验。

三是注意教师用书与科普读物的区别。编委会和编写队伍达成基本共识，就是内容的呈现要坚持教师用书的形态，特别是C、D类课程用书。虽然内容的述说要做到通俗易懂，但一定要让学生在学的过程中，感悟数学作为应用工具，在人文、社会、体育、艺术中的作用；感悟数学作为特殊语言，在表达事物的概念、关系和规律的过程中所表现出来的简洁性与准确性。这样的感悟将会使学生终身受益。

综上所述，本套用书可以作为普通高中选修课程的教师用书，学生可以根据自己的志向和兴趣选择其中的某些课程。基于内容的选取和表述的形式，本套用书还可以作为大专院校人文、社会、体育、艺术类学科有关课程的教师用书。

本套用书中有些专题首次以教师用书的形式出现，不妥之处在所难免，希望读者提出改进的意见与建议。

编委会
2021年1月

美与数学的表达

美是人们对事物的一种感觉^①。这里所说的事物大体上可以分为自然的和艺术的两类，其中自然的是指没有经过人类加工过的、事物原有的风貌；艺术的是指人类创作的东西，包括音乐、舞蹈、绘画、书法、雕塑、诗歌、戏剧、小说、电影、摄影、建筑设计、平面设计等，在现代社会，还可以拓展到计算机设计等诸多形式。

虽然人们对于美的感觉存在差异，甚至一个人对美的感觉可能会随着心情的改变而改变，但是，在大多数情况下，人们对美的感觉是具有共性的，比如，春天盛开的鲜花、夏日晴朗的夜空，都会使人心旷神怡；敦煌的壁画千年不朽，李白的诗歌传唱至今；特别是在科学技术高速发展的今天，一首感人的歌曲很快会在网上传唱，一部动人的电影短时间就会赢得高票房。

如果美是具有共性的，那么美就是可以学习的。学会审美非常重要。美可以陶冶人的道德情操，增加生活的乐趣；美可以改善人的思维品质，提高行为的素养。不仅如此，美还能激发人的创造力，许多科学家、包括数学家潜心研究学问的动力不仅是为了探究真理，也来自对美的追求，如法国数学家庞加莱（H. Poincare）所说^②：

科学家之所以研究自然，不是因为这样做很有用。他们研究自然是因为能从中得到乐趣，而他们能够得到乐趣是因为它美。如果自然不美，它就不值得去探求，生命也不值得存在……我指的是本质上的美，它根源于自然各部分和谐的秩序，并且纯理智能够领悟它。

关于科学家研究的动机与美的追求之间的关系，科学家爱因斯坦（A. Einstein）说的更为生动，他在德国物理学家普朗克（M. Planck）六十岁生日的庆祝会上说^③：

首先我同意叔本华所说的，把人们引向艺术和科学的最强烈的动机之一，是要逃避日常生活中令人厌恶的粗俗和使人绝望的沉闷，是要摆脱人们自己反复无常的欲望的桎梏……

除了这种消极的动机，还有一种积极的动机，人们总是想以最适当的方式来画一幅简化的和易领悟的世界图像；于是他们就试图用他的这种世界体系来代替经验的世界，

① 美通常与审美关联，审美的英语单词 Aesthetic 源于希腊语 Aesthetikos，原意就是感觉。

② S. 钱德拉塞卡，真理与美 [M]，杨建邺，王晓明，译，长沙：湖南科学技术出版社，2018：88。

③ 爱因斯坦，爱因斯坦文集：第一卷 [M]，许良英，范岱年，编译，北京：商务印书馆，1976：101。

并来征服它。这就是画家、诗人、思辨哲学家和自然科学家所做的，他们都按自己的方式去做。

无论庞加莱所说的“自然各部分和谐的秩序”还是爱因斯坦所说的“一幅简化的和易领悟的世界图像”，都涉及自然界的规律或者事物的共性。凡是具有规律或者共性的东西，必然会存在某种客观的本质属性。对于美而言，客观的本质属性就是审美的对象，引发人们从各个角度观察与追求。虽然随着时代的变迁，人们审美的标准会有所变化，但审美对象本身是相对稳定的，如马克思（K. Marx）在《政治经济学》导言中所说^①：

困难不在于理解希腊艺术和史诗同一定社会发展形式结合在一起。困难的是，它们何以仍然能够给我们以艺术享受，而且从某些方面来说还是一种规范的高不可及的范本。

人们通过各种艺术形式探究美的客观本质属性，这就是对于美的研究。比如在中国古代，刘勰的《文心雕龙》是研究一般美学的著作，顾恺之的《论画》、张彦远的《历代名画记》、石涛的《苦瓜和尚画语录》等是关于中国古代绘画艺术鉴赏的著作。

可以想象，古今中外关于一般美学的哲学著作，以及各种艺术形式鉴赏的著作，必将是种类繁多、举不胜举的。这些著作论述的道理千差万别，甚至对于美的定义也是众说纷纭，但是，这些著作有一个共同的特点，那就是，书写这些著作的语言都是日常生活中的语言，虽然这些语言的表达形式会因为国家或民族的不同而不同。

现在，呈现给同学们的教材，将会用另一种语言来表达美的共性，这就是数学的语言。人们一般会认为，数学是通过抽象思维得到的，是理性的东西；艺术是通过形象思维得到的，是感性的东西，二者之间似乎是风马牛不相及。但事实上，数学与艺术，或者更一般地说，数学与美学有着千丝万缕的联系，是不可分割的。主要有两方面的原因，一方面，数学也是一种语言，人们借助这种语言能够很好地认识、理解和表达现实世界中的那些具有共性的、具有规律性的东西，比如，我们将要讨论的美的客观本质属性；另一方面，数学本身也具有美的那些本质属性，许多数学家不仅从逻辑的角度，也从美的角度审视数学结论^②。这里所说的这两个方面，就是这本书涉及的主要内容。

之所以说数学也是一种语言，因为数学可以像日常生活的语言一样承载着思想，可以成为表达和交流的工具。意大利物理学家伽利略（G. Galilei）曾经感慨^③：

① 中共中央马克思恩格斯列宁斯大林著作编译局。马克思恩格斯选集：第2卷 [M]。北京：人民出版社，1972：114。

② 如德国数学家外尔所说：“我的工作总是尽力把真和美统一起来，但当我必须在两者中挑选一个时，我通常选择美。”S. 钱德拉塞卡。真理与美 [M]。杨建邺，王晓明，译。长沙：湖南科学技术出版社，2018：78。

③ 爱德文·阿瑟·波特。近代物理科学的形而上学基础 [M]。徐向东，译。北京：北京大学出版社，2003：56。

哲学被写在展现于我们眼前的伟大之书上,这里我指的是宇宙。但是,如果我们不首先学会用来书写它的语言和符号,我们就无法理解它。这本书是以数学语言写的,它的符号就是三角形、圆和其他几何图形,没有这些符号的帮助,我们简直无法理解它的片言只语;没有这些符号,我们只能在黑暗的迷宫中徒劳地摸索。

显然,伽利略所说的数学语言是指数学的概念、符号和方程式等。事实上,是伽利略第一个用数学语言讲述了最具现实意义的自然界的故事,这就是用数学方程式表达自由落体的变化规律,后来人们称这个方程式为重力加速度模型。如果忽略空气阻力,物体下落的距离 s 与下落的时间 t 之间的关系可以表示为 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 。在这个方程式中, g 表示重力加速度,是一个与引力大小有关的常数,在地球上大约为 9.8 m/s^2 ,在月球上大约为 1.6 m/s^2 。重力加速度的差异就是为什么人在月球上行走更为轻盈的缘故。这样,伽利略就用数学的语言,给出了一个全新的认识世界的方法,这就是用数学的语言探究并且表达自然界存在的规律。伽利略的研究方法引领了近代物理学,甚至整个近代科学的发展。如爱因斯坦评价的那样^①:“由于伽利略看到了这一点,尤其是由于他向科学界谆谆不倦地教导这一点,他才成为近代物理学之父。事实上,也成为整个近代科学之父。”

数学源于对现实世界的抽象,主要是对现实世界中数量关系和空间形式的抽象,得到数学的研究对象以及研究对象之间的关系,比如,自然数以及自然数的大小关系;点、直线、平面,以及两点确定一条直线、三点确定一个平面这样的关系。数学通过概念确立、符号运算、形式推理、模型构建等推理过程得到数学的结论,理解和表述现实世界中事物的本质、关系和规律。数学不仅是运算和推理的工具,还是表达和交流的语言。特别地,数学的抽象使得数学的研究具有一般性。因此,使用数学语言,可以表达那些具有共性的,具有规律性的事物的本质属性,就像伽利略所做的那样。

既然美的本质属性是具有共性的,是有规律的,那么,就可以尝试用数学的语言予以表达,这就是这本教材写作的初衷。如同前面所说的那样,这本教材不仅要用数学的语言述说现实世界中美的故事,而且要表述数学本身也具有的美的那些本质属性,主要体现是简洁性、对称性、周期性、和谐性。本书将分四章分别讨论这四个本质属性。

^① 爱因斯坦. 爱因斯坦文集:第一卷 [M]. 许良英, 范岱年, 编译. 北京: 商务印书馆, 1976: 313.

目录

第一章 简洁美与数学

1.1 简洁与统一	2
1.2 简洁美与数学的抽象	9
1.3 简洁美与绘画的抽象	13
1.4 生活与艺术中的简洁美	18
阅读材料 计算机结构设计中的简洁美	23

第二章 对称美与数学

2.1 自然界中的对称与数学表达	26
2.2 中国传统文化中的对称美	29
2.3 对称美在艺术作品中的表现	33
2.4 物质结构中的对称美与数学表达	35
阅读材料 1 欧拉公式的证明	39
阅读材料 2 空间只有五种正多面体的证明	40
阅读材料 3 麦克斯韦方程的意义	40

第三章 周期美与数学

3.1 通过周期刻画时间	43
3.2 中国传统文化中的周期美	47
3.3 周期的利用与数学表达	52
阅读材料 贾湖骨笛	58

第四章 和谐美与数学

4.1 图形比例的和谐美与数学表达	60
4.2 自然界中的和谐美	62
阅读材料 斐波那契数列的通项公式	65
4.3 中国传统文化中的和谐美	67
4.4 复制的和谐美与数学表达	71
阅读材料 分形几何中的分数维	75