微专题47 多变量表达式的范围——放缩消元法

一、基础知识：

在有些多变量表达式的题目中，所提供的条件为不等关系，则也可根据不等关系进行消元，从而将多变量表达式转化为一元表达式，便于求得最值

1、放缩法求最值的理论基础：

不等式的传递性：若 $f\left(x,y\right)\geq g\left(x\right),g\left(x\right)\geq m$，则 $f\left(x,y\right)\geq m$

2、常见的放缩消元手段：

（1）抓住题目中的不等关系，若含有两个变量间的不等关系，则可利用这个关系进行放缩消元

（2）配方法：通过利用“完全平方式非负”的特性，在式子中构造出完全平方式，然后令其等于 0，达到消元的效果

（3）均值不等式：构造能使用均值不等式的条件，利用均值不等式达到消元的效果

（4）主元法：将多元表达式视为某个变量（即主元）的函数，剩下的变量视为常数，然后利用常规方法求得最值从而消去主元，达到消元的效果。

3、放缩消元过程中要注意的地方：

（1）在放缩过程中应注意所求最值与不等号方向的对应关系，例如：若求最小值，则对应的不等号为“$\geq$”；若求最大值，则对应的不等号为“$\leq$”。放缩的方向应与不等号的方向一致

（2）对进行放缩消元后的式子，要明确是求其最大值还是最小值。放缩法求最值的基础是不等式的传递性，所以在求最值时要满足其不等号的方向一致。若将关于 x,y 的表达式 $f\left(x,y\right)$ 进行放缩消去 y，得到 $g\left(x\right)$，例如 $f\left(x,y\right)\geq g\left(x\right)$，则下一步需要求出 $g\left(x\right)$ 的最小值（记为 m），即 $f\left(x,y\right)\geq g\left(x\right)\geq m$，通过不等式的传递性即可得到 $f\left(x,y\right)\geq m$。同理，若放缩后得到：$f\left(x,y\right)\leq g\left(x\right)$，则需要求出 $g\left(x\right)$ 的最大值（记为 M），即 $f\left(x,y\right)\leq g\left(x\right)\leq M$，然后通过不等式的传递性得到 $f\left(x,y\right)\leq M$

（3）在放缩的过程中，要注意每次放缩时等号成立的条件能够同时成立，从而保证在不等式中等号能够一直传递下去

二、典型例题：

例 1：设集合$\left\{\frac{3}{a}+b \mid 1\le a\le b\le 2\right\}$中的最大元素与最小元素分别为$M,m$，则$M-m$的值为__________

思路：考虑分别求出$\frac{3}{a}+b$的最大值与最小值，先求$\frac{3}{a}+b$的最大值，只需a取最小，b取最大：$\frac{3}{a}+b\le\frac{3}{1}+2=5$即$M=5$，再求$\frac{3}{a}+b$的最小值，由$1\le a\le b$可知利用$b\ge a$进行放缩，从而消去$b$，可得：$\frac{3}{a}+b\ge\frac{3}{a}+a$，再利用均值不等式可得：$\frac{3}{a}+b\ge\frac{3}{a}+a\ge 2\sqrt{\frac{3}{a}\cdot a}=2\sqrt{3}$，所以$\frac{3}{a}+b$的最小值$m=2\sqrt{3}$，从而$M-m=5-2\sqrt{3}$

答案：$5-2\sqrt{3}$

例 2：已知A,B,C是任意三点，$BC=a,CA=b,AB=c$，则$y=\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c}$的最小值是________

思路：因为$a\le b+c$，所以结合不等号的方向可将a消去，从而转化为关于b,c的表达式：$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c}\ge\frac{c}{b+c+b}+\frac{b}{c}=\frac{c}{2b+c}+\frac{b}{c}$，然后可从$\frac{b}{c}$出发，构造出与第一项互为倒数的性质以便于利用均值不等式解出最值：$\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b+c}{c}-\frac{1}{2}$，从而有：$\frac{c}{2b+c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2b+c}{c}-\frac{1}{2}\ge\sqrt{2}-\frac{1}{2}$，所以$y=\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c}\ge\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

答案：$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

例 3：设实数a,b,c满足$a^2+b^2\le c\le 1$，则$a+b+c$的最大值为__________

思路：由$a+b+c$可联想到$(a+b)$与a^2+b^2的关系，即$a+b\le 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，所以$a+b+c\le 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+c$，然后可利用$a^2+b^2\le c$进一步放缩消元，得$a+b+c\le 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+c\le\sqrt{2c}+c$，在利用$c\le 1$即可得到最大值：$\sqrt{2c}+c\le\sqrt{2}+1$，

所以$a+b+c$的最大值为$\sqrt{2}+1$，其中等号成立条件为：$\begin{cases}a=b\\a^2+b^2=c\\c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}\\c=1\end{cases}$