

微专题 49 等差数列性质

一、基础知识：

1、定义：数列 $\{a_n\}$ 若从第二项开始，每一项与前一项的差是同一个常数，则称 $\{a_n\}$ 是等差数列，这个常数称为 $\{a_n\}$ 的公差，通常用 d 表示

2、等差数列的通项公式： $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，此通项公式存在以下几种变形：

(1) $a_n = a_m + (n-m)d$ ，其中 $m \neq n$ ：已知数列中的某项 a_m 和公差即可求出通项公式

(2) $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ ：已知等差数列的两项即可求出公差，即项的差除以对应序数的差

(3) $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ ：已知首项，末项，公差即可计算出项数

3、等差中项：如果 a, b, c 成等差数列，则 b 称为 a, c 的等差中项

(1) 等差中项的性质：若 b 为 a, c 的等差中项，则有 $c - b = b - a$ 即 $2b = a + c$

(2) 如果 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $\forall n \geq 2, n \in N^*$ ， a_n 均为 a_{n-1}, a_{n+1} 的等差中项

(3) 如果 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $a_m + a_n = a_p + a_q \Leftrightarrow m + n = p + q$

注：①一般情况下，等式左右所参与项的个数可以是多个，但要求两边参与项的个数相等。

比如 $m + n = p + q + s$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q + a_s$ 不一定成立

② 利用这个性质可利用序数和与项数的特点求出某项。例如： $a_4 + a_7 + a_8 + a_9 = 20$ ，可得

$a_4 + a_7 + a_8 + a_9 = a_7 + a_7 + a_7 + a_7 = 4a_7 = 20$ ，即可得到 $a_7 = 5$ ，这种做法可称为“多项合一”

4、等差数列通项公式与函数的关系：

$a_n = a_1 + (n-1)d = d \cdot n + a_1 - d$ ，所以该通项公式可看作 a_n 关于 n 的一次函数，从而可通过函数的角度分析等差数列的性质。例如： $d > 0$ ， $\{a_n\}$ 递增； $d < 0$ ， $\{a_n\}$ 递减。

5、等差数列前 n 项和公式： $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ ，此公式可有以下变形：

(1) 由 $m + n = p + q \Leftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$ 可得： $S_n = \frac{a_p + a_q}{2} \cdot n (p + q = n + 1)$ ，作用：

在求等差数列前 n 项和时，不一定必须已知 a_1, a_n ，只需已知序数和为 $n+1$ 的两项即可

$$(2) \text{ 由通项公式 } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ 可得: } S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}d$$

作用：① 这个公式也是计算等差数列前 n 项和的主流公式

$$② S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{1}{2}d\right)n, \text{ 即 } S_n \text{ 是关于项数 } n \text{ 的二次函数 } (n \in N^*),$$

且不含常数项，可记为 $S_n = An^2 + Bn$ 的形式。从而可将 S_n 的变化规律图像化。

(3) 当 $n = 2k - 1 (k \in N^*)$ 时，

$$S_{2k-1} = \frac{a_1 + a_{2k-1}}{2} \cdot (2k-1) \quad \text{因为 } a_1 + a_{2k-1} = 2a_k$$

$\therefore S_{2k-1} = (2k-1)a_k$ 而 a_k 是 S_{2k-1} 的中间项，所以此公式体现了奇数项和与中间项的联系

当 $n = 2k (k \in N^*)$ 时

$$S_{2k} = \frac{a_1 + a_{2k}}{2} \cdot 2k = k(a_k + a_{k+1}), \text{ 即偶数项和与中间两项和的联系}$$

6、等差数列前 n 项和的最值问题：此类问题可从两个角度分析，一个角度是从数列中项的符号分析，另一个角度是从前 n 项和公式入手分析

(1) 从项的特点看最值产生的条件，以 4 个等差数列为例：

$$\{a_n\}: 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \quad \{b_n\}: 7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots$$

$$\{c_n\}: -1, -3, -5, -7, -9, \dots \quad \{d_n\}: -9, -7, -5, -3, -1, 1, \dots$$

通过观察可得： $\{a_n\}$ 为递增数列，且 $a_1 > 0$ ，所以所有的项均为正数，前 n 项和只有最小值，

即 a_1 ，同理 $\{c_n\}$ 中的项均为负数，所以前 n 项和只有最大值，即 c_1 。而 $\{b_n\}$ 虽然是递减数列，

但因为 $b_1 > 0$ ，所以直到 $b_5 = -1$ ，从而前 4 项和最大，同理， $\{d_n\}$ 的前 5 项和最小。由此可

发现规律：对于等差数列，当首项与公差异号时，前 n 项和的最值会出现在项的符号分界处。

$$(2) \text{ 从 } S_n = An^2 + Bn \text{ 的角度：通过配方可得 } S_n = A\left(n + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A}, \text{ 要注意 } n \in N^*, \text{ 则}$$

可通过图像判断出 S_n 的最值

7、由等差数列生成的新等差数列

(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，等间距的抽出一些项所组成的新数列依然为等差数列