

微专题 44 线性规划中的非常规问题

一、基础知识：

在线性规划问题中，除了传统的已知可行域求目标函数最值之外，本身还会结合围成可行域的图形特点，或是在条件中设置参数，与其它知识相结合，产生一些非常规的问题。在处理这些问题时，第一依然要借助可行域及其图形；第二，要确定参数的作用，让含参数的图形运动起来寻找规律；第三，要能将图形中的特点与关系翻译成代数的语言，并进行精确计算。做到以上三点，便可大大增强解决此类问题的概率。

二、典型例题：

例 1：不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -kx + 4k \end{cases} \quad (k > 1)$ 所表示的平面区域为 D ，若 D 的面积为 S ，则 $\frac{kS}{k-1}$ 的

最小值为_____

思路：先作出平面区域。直线

$y = -kx + 4k = k(4 - x)$ ，可判断出过定点 $(4, 0)$ ，

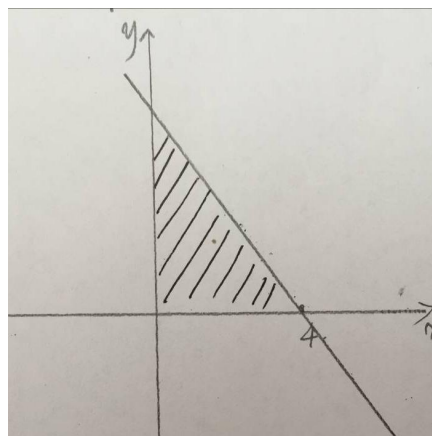
通过作图可得平面区域 D 为直角三角形。所以三角形

面积 $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4k = 8k$ 。从而

$$\frac{kS}{k-1} = \frac{8k^2}{k-1} = 8 \left(k + 1 + \frac{1}{k-1} \right) = 8 \left(k-1 + \frac{1}{k-1} + 2 \right)$$

，因为 $k-1 + \frac{1}{k-1} \geq 2$ ，所以 $S \geq 32$

答案：32



例 2：关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases} y \geq |x-a| \\ y \leq -|x|+b \end{cases} \quad (b > a > 0)$ 所确定的区域面积为 2，则 $2b-a$ 的最

小值为（ ）

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. 1

思路：要求出 $2b-a$ 的最值，则需要 a, b 的关系，所以要借助不等式组的面积，先作出不等

式的表示区域，从斜率可判断出该区域为一个矩形，可得长为 $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ ，宽为 $\frac{b-a}{\sqrt{2}}$ ，所以

$S = \frac{b^2 - a^2}{2} = 2$ ，即 $b^2 - a^2 = 4$ ，作出双曲线，通过平移

$z = 2b - a$ 可得直线与 $b^2 - a^2 = 4$ 相切时， $2b - a$ 取得最小

值。即：

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 4 \\ z = 2b - a \end{cases} \Rightarrow 3a^2 - 2az + 16 - z^2 = 0$$

$\Delta = 4(4z^2 - 48) = 0$ 解得 $z = 2\sqrt{3}$ ，所以 $z = 2b - a$ 的最小

值为 $2\sqrt{3}$

答案：B

例 3：若不等式组

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq s \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$
 表示的平面区域是一个三角形，则实数 s 的取值范围是（ ）

A. $0 < s \leq 2$ 或 $s \geq 4$

B. $0 < s \leq 2$

C. $s \geq 4$

D. $s \leq 2$ 或 $s \geq 4$

思路：本题约束条件含参，所以先从常系数不等式入手作图，直线 $x + y = s$ 为一组平行线，在平移的过程中观察能否构成一个三角形。一方面，

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$
 本身就构成一个三角形。所以当 $s \geq 4$

时，不等式组的区域与

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$
 区域相同，从而

符合题意。继续将直线 $x + y = s$ 向下平移。可得

$2 < s < 4$ 时，不等式组的区域为一个四边形。当

$0 < s \leq 2$ 时， $x + y = s$ 从

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$
 的区域中切

割出来了一个三角形。所以符合题意。而 $s \leq 0$ 时，不等式组无公共区域。综上所述， $0 < s \leq 2$ 或 $s \geq 4$

答案：A

