

微专题 41 指对数比较大小

在填空选择题中我们会遇到一类比较大小的问题，通常是三个指数和对数混在一起，进行排序。这类问题如果两两进行比较，则花费的时间较多，所以本讲介绍处理此类问题的方法与技巧

一、一些技巧和方法

1、如何快速判断对数的符号？八字真言“同区间正，异区间负”，容我慢慢道来：

判断对数的符号，关键看底数和真数，区间分为 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$

(1) 如果底数和真数均在 $(0,1)$ 中，或者均在 $(1,+\infty)$ 中，那么对数的值为正数

(2) 如果底数和真数一个在 $(0,1)$ 中，一个在 $(1,+\infty)$ 中，那么对数的值为负数

例如： $\log_3 0.5 < 0, \log_{0.5} 0.3 > 0, \log_2 3 > 0$ 等

2、要善于利用指对数图像观察指对数与特殊常数（如 0, 1）的大小关系，一作图，自明了

3、比较大小的两个理念：

(1) 求同存异：如果两个指数（或对数）的底数相同，则可通过真数的大小与指对数函数的单调性，判断出指数（或对数）的关系，所以要熟练运用公式，尽量将比较的对象转化为某一部分相同的情况

例如： $3^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{1}{5}}$ ，比较时可进行转化，尽管底数难以转化为同底，但指数可以变为相同

$3^{\frac{1}{3}} = (3^4)^{\frac{1}{12}}, 4^{\frac{1}{4}} = (4^3)^{\frac{1}{12}}, 5^{\frac{1}{5}} = (5^6)^{\frac{1}{12}}$ ，从而只需比较底数的大小即可

(2) 利用特殊值作“中间量”：在指对数中通常可优先选择“0, 1”对所比较的数进行划分，然后再进行比较，有时可以简化比较的步骤（在兵法上可称为“分割包围，各个击破”，也有一些题目需要选择特殊的常数对所比较的数的值进行估计，例如 $\log_2 3$ ，可知

$1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2$ ，进而可估计 $\log_2 3$ 是一个 1 点几的数，从而便于比较

4、常用的指对数变换公式：

$$(1) a^m = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

$$(2) \log_a M + \log_a N = \log_a MN \quad \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$(3) \log_a N^n = n \log_a N \quad (a > 0, a \neq 1, N > 0)$$

$$(4) \text{换底公式: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{进而有两个推论: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\text{令 } c = b) \quad \log_{a^m} N^n = \frac{n}{m} \log_a N$$

二、典型例题：

例 1：设 $a = \log_3 \pi, b = \log_2 \sqrt{3}, c = \log_3 \sqrt{2}$ ，则 a, b, c 的大小关系是_____

思路：可先进行 0,1 分堆，可判断出 $a > 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$ ，从而 a 肯定最大，只需比较 b, c 即可，观察到 b, c 有相同的结构：真数均带有根号，抓住这个特点，利用对数公式进行变换：

$$b = \log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3, c = \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2, \text{从而可比较出 } \log_3 2 < 1 < \log_2 3, \text{所以 } c < b$$

答案： $c < b < a$

例 2：设 $a = \log_3 2, b = \ln 2, c = 5^{-\frac{1}{2}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是_____

思路：观察发现 a, b, c 均在 $(0, 1)$ 内， a, b 的真数相同，进而可通过比较底数得到大小关系：

$a < b$ ，在比较和 c 的大小，由于 c 是指数，很难直接与对数找到联系，考虑估计 a, b, c 值得

$$\text{大小：} c = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \text{可考虑以 } \frac{1}{2} \text{ 为中间量，则 } a = \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{进而}$$

$$a > \frac{1}{2} > c, \text{所以大小顺序为 } b > a > c$$

答案： $b > a > c$

例 3：设 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

思路：观察到 a, b, c 都是以 e 为底的对数，所以将其系数“放”进对数之中，再进行真数的比

$$\text{较。} a = \frac{\ln 2}{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}}, b = \frac{\ln 3}{3} = \ln 3^{\frac{1}{3}}, c = \frac{\ln 5}{5} = \ln 5^{\frac{1}{5}}, \text{发现真数的底与指数也不相同，所以依}$$

然考虑“求同存异”，让三个真数的指数一致： $2^{\frac{1}{2}} = (2^{15})^{\frac{1}{30}}, 3^{\frac{1}{3}} = (3^{10})^{\frac{1}{30}}, 5^{\frac{1}{5}} = (5^6)^{\frac{1}{30}}$ ，通过比较底数的大小可得： $b > a > c$

答案：C

小炼有话说：(1) 本题的核心处理方式就是“求同存异”，将三个数变形为具备某相同的部分，从而转换比较的对象，将“无法比较”转变为“可以比较”

(2) 本题在比较指数幂时，底数的次数较高，计算起来比较麻烦。所以也可以考虑将这三个数两两进行比较，从而减少底数的指数便于计算。例如可以先比较 a, b ： $2^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}, 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}}$ ，从而 $a < b$ ，同理再比较 a, c 或 b, c 即可

例 4：设 $a = \log_3 6, b = \log_5 10, c = \log_7 14$ ，则（ ）

- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

思路：观察可发现：

$$a = \log_3 (3 \times 2) = 1 + \log_3 2, b = \log_5 (5 \times 2) = 1 + \log_5 2, c = \log_7 (7 \times 2) = 1 + \log_7 2$$

$\log_3 2 > \log_5 2 > \log_7 2$ ，所以可得： $a > b > c$