微专题19 利用函数证明数列不等式

利用函数证明不等式是在高考导数题中比较考验学生灵活运用知识的能力，一方面以函数为背景让学生探寻函数的性质，另一方面体现数列是特殊的函数，进而利用恒成立的不等式将没有规律的数列放缩为为有具体特征的数列，可谓一题多考，巧妙地将函数，数列，不等式连接在一起，也是近年来高考的热门题型。

一、基础知识：

1、考察类型：

（1）利用放缩通项公式解决数列求和中的不等问题

（2）利用递推公式处理通项公式中的不等问题

2、恒成立不等式的

（1）函数的最值：在前面的章节中我们提到过最值的一个作用就是提供恒成立的不等式。

（2）恒成立问题的求解：此类题目往往会在前几问中进行铺垫，暗示数列放缩的方向。其中，有关恒成立问题的求解，参数范围内的值均可提供恒成立不等式

3、常见恒成立不等式：

（1）$\ln x < x-1$　对数→多项式　（2）$e^x > x+1$　指数→多项式

4、关于前n项和的放缩问题：求数列前n项公式往往要通过数列的通项公式来解决，高中阶段求和的方法有以下几种：

（1）倒序相加：通项公式具备第k项与第$n-k+1$项的和为常数的特点

（2）错位相减：通项公式为“等差×等比”的形式（例如$a_n = n\cdot 2^n$，求和可用错位相减）

（3）等比数列求和公式

（4）裂项相消：通项公式可裂为两项作差的形式，且a_n裂开的某项能够与后面项裂开的某项进行相消。

注：在放缩法处理数列求和不等式时，放缩为等比数列和能够裂项相消的数列的情况比较多见，故优先考虑。

5、大体思路：对于数列求和不等式，要谨记“求和看通项”，从通项公式入手，结合不等号方向考虑放缩成可求和的通项公式。

6、在放缩时要注意前几问的铺垫与提示，尤其是关于恒成立问题与最值问题所带来的恒成立不等式，往往提供了放缩数列的方向

7、放缩通项公式有可能会进行多次，要注意放缩的方向：朝着可求和的通项公式进行靠拢（等比数列，裂项相消等）

8、数列不等式也可考虑利用数学归纳法进行证明（有时更容易发现所证不等式与题目条件的联系）

二、典型例题：

例 1： 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+a\right)-x^2-x$ 在 $x=0$ 处取得极值

（1）求实数 a 的值

（2）证明：对于任意的正整数 n，不等式 $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}>\ln(n+1)$ 都成立

解：（1） $f'\left(x\right)=\frac{1}{x+a}-2x-1$ $\because x=0$ 为 $f\left(x\right)$ 的极值点

$\therefore f'\left(0\right)=\frac{1}{a}-1=0\Rightarrow a=1$

（2）思路一：联想所证不等式与题目所给函数的联系，会发现在 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-x^2-x$ 中，存在对数，且左边数列的通项公式 $a_n=\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2$ 也具备 $f\left(x\right)$ 项的特征，所以考虑分析 $\ln\left(x+1\right)$ 与 x^2+x 的大小关系，然后与数列进行联系。

解：下面求 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-x^2-x$ 的单调区间

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{x+1}-2x-1=-\frac{x\left(2x+3\right)}{x+1},\text{令 } f'\left(x\right)>0\Rightarrow x<0$$

x	$\left(-1,0\right)$	$\left(0,+\infty\right)$
$g'\left(x\right)$	+	−
$g\left(x\right)$	↗	↘

$\therefore f\left(x\right)<f\left(0\right)=0$ 即 $\ln\left(x+1\right)<x^2+x$ （每一个函数的最值都会为我们提供一个恒成立的不等式，不用白不用！观察刚好与所证不等式不等号方向一致）

令 $x=\frac{1}{n}$，则 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)<\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}$ 即 $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{n+1}{n^2}$

$\therefore \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}<2+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}$