

微专题 09 零点存在的判定与证明

一、基础知识：

1、函数的零点：一般的，对于函数 $y = f(x)$ ，我们把方程 $f(x) = 0$ 的实数根 x_0 叫作函数 $y = f(x)$ 的零点。

2、零点存在性定理：如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内必有零点，即 $\exists x_0 \in (a, b)$ ，使得 $f(x_0) = 0$

注：零点存在性定理使用的前提是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续，如果 $f(x)$ 是分段的，那么零点不一定存在

3、函数单调性对零点个数的影响：如果一个连续函数是单调函数，那么它的零点至多有一个。因此分析一个函数零点的个数前，可尝试判断函数是否单调

4、几个“不一定”与“一定”（假设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 连续）

（1）若 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ “一定”存在零点，但“不一定”只有一个零点。要分析 $f(x)$ 的性质与图像，如果 $f(x)$ 单调，则“一定”只有一个零点

（2）若 $f(a) \cdot f(b) > 0$ ，则 $f(x)$ “不一定”存在零点，也“不一定”没有零点。如果 $f(x)$ 单调，那么“一定”没有零点

（3）如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 中存在零点，则 $f(a) \cdot f(b)$ 的符号是“不确定”的，受函数性质与图像影响。如果 $f(x)$ 单调，则 $f(a) \cdot f(b)$ 一定小于 0

5、零点与单调性配合可确定函数的符号： $f(x)$ 是一个在 (a, b) 单增连续函数， $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的零点，且 $x_0 \in (a, b)$ ，则 $x \in (a, x_0)$ 时， $f(x) < 0$ ； $x \in (x_0, b)$ 时， $f(x) > 0$

6、判断函数单调性的方法：

（1）可直接判断的几个结论：

① 若 $f(x), g(x)$ 为增（减）函数，则 $f(x) + g(x)$ 也为增（减）函数

② 若 $f(x)$ 为增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；同样，若 $f(x)$ 为减函数，则 $-f(x)$ 为增函数

③ 若 $f(x), g(x)$ 为增函数，且 $f(x), g(x) > 0$ ，则 $f(x) \cdot g(x)$ 为增函数

(2) 复合函数单调性：判断 $y = f(g(x))$ 的单调性可分别判断 $t = g(x)$ 与 $y = f(t)$ 的单调性（注意要利用 x 的范围求出 t 的范围），若 $t = g(x)$ ， $y = f(t)$ 均为增函数或均为减函数，则 $y = f(g(x))$ 单调递增；若 $t = g(x)$ ， $y = f(t)$ 一增一减，则 $y = f(g(x))$ 单调递减（此规律可简记为“同增异减”）

(3) 利用导数进行判断——求出单调区间从而也可作出图像

7、证明零点存在的步骤：

(1) 将所证等式中的所有项移至等号一侧，以便于构造函数

(2) 判断是否要对表达式进行合理变形，然后将表达式设为函数 $f(x)$

(3) 分析函数 $f(x)$ 的性质，并考虑在已知范围内寻找端点函数值异号的区间

(4) 利用零点存在性定理证明零点存在

例 1：函数 $f(x) = e^x + 2x - 3$ 的零点所在的一个区间是（ ）

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

思路：函数 $f(x)$ 为增函数，所以只需代入每个选项区间的端点，判断函数值是否异号即可

$$\text{解：} f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 4 < 0, \quad f(0) = -2 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = \sqrt{e} - 2 < 0$$

$$f(1) = e + 2 - 3 = e - 1 > 0 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0 \quad \therefore x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } f(x_0) = 0$$

答案：C

例 2：函数 $f(x) = \ln(x-1) + x$ 的零点所在的大致区间是（ ）

- A. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ C. $(2, e)$ D. $(e, +\infty)$

思路：先能判断出 $f(x)$ 为增函数，然后利用零点存在性判定定理，只需验证选项中区间端点