

微专题 05 函数的对称性与周期性

一、基础知识

（一）函数的对称性

1、对定义域的要求：无论是轴对称还是中心对称，均要求函数的定义域要关于对称轴（或对称中心）对称

2、轴对称的等价描述：

（1） $f(a-x)=f(a+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称（当 $a=0$ 时，恰好就是偶函数）

（2） $f(a-x)=f(b+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 轴对称

在已知对称轴的情况下，构造形如 $f(a-x)=f(b+x)$ 的等式只需注意两点，一是等式两侧 f 前面的符号相同，且括号内 x 前面的符号相反；二是 a, b 的取值保证 $x=\frac{a+b}{2}$ 为所给对称轴即可。例如： $f(x)$ 关于 $x=1$ 轴对称 $\Rightarrow f(x)=f(2-x)$ ，或得到 $f(3-x)=f(-1+x)$ 均可，只是在求函数值方面，一侧是 $f(x)$ 更为方便

（3） $f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x+a)$ ，进而可得到： $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称。

① 要注意偶函数是指自变量取相反数，函数值相等，所以在 $f(x+a)$ 中， x 仅是括号中的一部分，偶函数只是指其中的 x 取相反数时，函数值相等，即 $f(x+a)=f(-x+a)$ ，要与以下的命题区分：

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f[-(x+a)]$ ： $f(x)$ 是偶函数中的 x 占据整个括号，所以是指括号内取相反数，则函数值相等，所以有 $f(x+a)=f[-(x+a)]$

② 本结论也可通过图像变换来理解， $f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)$ 关于 $x=0$ 轴对称，而 $f(x)$ 可视为 $f(x+a)$ 平移了 $|a|$ 个单位（方向由 a 的符号决定），所以 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称。

3、中心对称的等价描述：

（1） $f(a-x)=-f(a+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $(a,0)$ 轴对称（当 $a=0$ 时，恰好就是奇函数）

（2） $f(a-x)=-f(b+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ 轴对称

在已知对称中心的情况下，构造形如 $f(a-x)=-f(b+x)$ 的等式同样需注意两点，一是

等式两侧 f 和 x 前面的符号均相反；二是 a, b 的取值保证 $x = \frac{a+b}{2}$ 为所给对称中心即可。例

如： $f(x)$ 关于 $(-1, 0)$ 中心对称 $\Rightarrow f(x) = -f(-2-x)$ ，或得到 $f(3-x) = -f(-5+x)$ 均

可，同样在求函数值方面，一侧是 $f(x)$ 更为方便

(3) $f(x+a)$ 是奇函数，则 $f(x+a) = -f(-x+a)$ ，进而可得到： $f(x)$ 关于 $(a, 0)$ 轴对称。

① 要注意奇函数是指自变量取相反数，函数值相反，所以在 $f(x+a)$ 中， x 仅是括号中的一部分，奇函数只是指其中的 x 取相反数时，函数值相反，即 $f(x+a) = f(-x+a)$ ，要与以下的命题区分：

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x+a) = -f[-(x+a)]$ ： $f(x)$ 是奇函数中的 x 占据整个括号，所以是指括号内取相反数，则函数值相反，所以有 $f(x+a) = -f[-(x+a)]$

② 本结论也可通过图像变换来理解， $f(x+a)$ 是奇函数，则 $f(x+a)$ 关于 $(0, 0)$ 中心对称，而 $f(x)$ 可视为 $f(x+a)$ 平移了 $|a|$ 个单位（方向由 a 的符号决定），所以 $f(x)$ 关于 $(a, 0)$ 对称。

4、对称性的作用：最突出的作用为“知一半而得全部”，即一旦函数具备对称性，则只需要分析一侧的性质，便可得到整个函数的性质，主要体现在以下几点：

- (1) 可利用对称性求得某些点的函数值
- (2) 在作图时可作出一侧图像，再利用对称性得到另一半图像
- (3) 极值点关于对称轴（对称中心）对称
- (4) 在轴对称函数中，关于对称轴对称的两个单调区间单调性相反；在中心对称函数中，关于对称中心对称的两个单调区间单调性相同

(二) 函数的周期性

1、定义：设 $f(x)$ 的定义域为 D ，若对 $\forall x \in D$ ，存在一个非零常数 T ，有 $f(x+T) = f(x)$ ，

则称函数 $f(x)$ 是一个周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的一个周期

2、周期性的理解：可理解为间隔为 T 的自变量函数值相等

3、若 $f(x)$ 是一个周期函数，则 $f(x+T) = f(x)$ ，那么 $f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$ ，

即 $2T$ 也是 $f(x)$ 的一个周期，进而可得： $kT (k \in \mathbb{Z})$ 也是 $f(x)$ 的一个周期

4、最小正周期：正由第 3 条所说， $kT (k \in \mathbb{Z})$ 也是 $f(x)$ 的一个周期，所以在某些周期函数中，往往寻找周期中最小的正数，即称为最小正周期。然而并非所有的周期函数都有最小正周期，比如常值函数 $f(x) = C$