

微专题 34 向量的模长问题——几何法

一、基础知识：

1、向量和差的几何意义：已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，则有：

(1) 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共起点，则利用平行四边形法则求 $\vec{a} + \vec{b}$ ，可得 $\vec{a} + \vec{b}$ 是以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线

(2) 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 首尾相接，则利用三角形法则求出 $\vec{a} + \vec{b}$ ，可得 $\vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{a}, \vec{b}$ 围成一个三角形

2、向量数乘的几何意义：对于 $\lambda \vec{a}$

(1) 共线（平行）特点： $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 为共线向量，其中 $\lambda > 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向； $\lambda < 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向

(2) 模长关系： $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

3、与向量模长问题相关的定理：

(1) 三角形中的相关定理：设 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 所对的边为 a, b, c

① 正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

② 余弦定理： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(2) 菱形：对角线垂直平分，且为内角的角平分线

特别的，对于底角 60° 的菱形，其中一条对角线将此菱形分割为两个全等的等边三角形。

(3) 矩形：若四边形 $ABCD$ 的平行四边形，则对角线相等是该四边形为矩形的充要条件

4、利用几何法求模长的条件：条件中的向量运算可构成特殊的几何图形，且所求向量与几何图形中的某条线段相关，则可考虑利用条件中的几何知识处理模长

二、典型例题：

例 1：（2015 届北京市重点中学高三 8 月开学测试数学试卷）已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 45° ，且

$|\vec{a}| = 1, |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$ ，则 $|\vec{b}| =$ ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

思路：本题利用几何图形可解，运用向量加减运算作出如下图形：可知

$|AB|=2, B=\frac{\pi}{4}, |AC|=\sqrt{10}$ ，只需利用余弦定理求出 $|BC|$ 即可。

解：如图可得： $|\vec{b}|=|BC|$ ，在 $\triangle ABC$ 中，有： $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB||BC|\cos B$

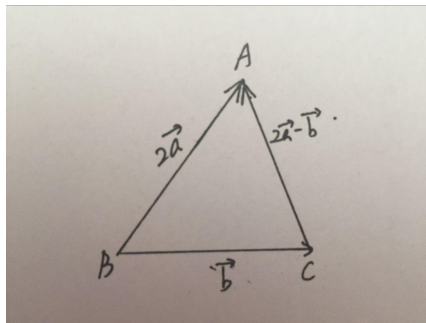
$$\text{即：} 10=4+|BC|^2-2\cdot 2|BC|\cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow |BC|^2-2\sqrt{2}|BC|-6=0 \text{ 解得 } |BC|=3\sqrt{2} \text{ 或}$$

$$|BC|=-\sqrt{2} \text{ (舍)}$$

$$\text{所以 } |\vec{b}|=3\sqrt{2},$$

答案：选 D



例 2：若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两所成的角相等，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1, |\vec{c}|=3$ ，则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 等于（ ）

A. 2

B. 5

C. 2 或 5

D. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$

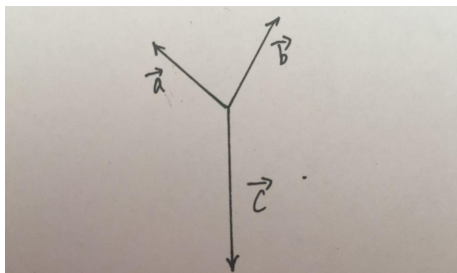
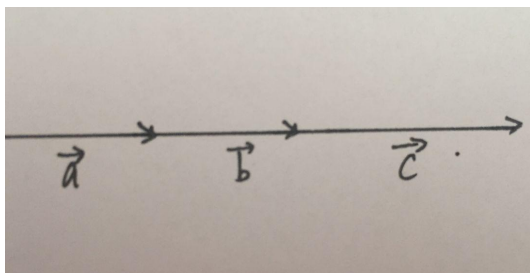
思路：首先由 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两所成的角相等可判断出存在两种情况：一是 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 同向（如图 1，此

时夹角均为 0），则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 为 5，另一种情况为两两夹角 $\frac{2\pi}{3}$ （如图 2），以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 为

突破口，由平行四边形法则作图得到 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角相等， $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|=1$ （底角为 60° 的菱

形性质），且与 $\vec{c}$ 反向，进而由图得到 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=2$ ，选 C

答案：C



例 3：已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，且 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ ，则 $|2\vec{b}-\vec{a}|$ 的取值范围是（ ）

A. $[1, 3]$

B. $[2, 4]$

C. $[3, 5]$

D. $[4, 6]$

思路：先作出 $\vec{a}$ ，即有向线段 AB ，考虑 $2\vec{b}-\vec{a}$ ，将 $2\vec{b}$ 的起点与 A 重合，终点 C 绕 A 旋转

且 $|AC|=2|\vec{b}|=4$ ，则 $|2\vec{b}-\vec{a}|$ 即为 $|BC|$ 的长度，通过观察可得 C 与 A, B 共线时 $|2\vec{b}-\vec{a}|$ 达到

最值。所以 $|2\vec{b}-\vec{a}|_{\max}=5, |2\vec{b}-\vec{a}|_{\min}=3$ ，且 $|2\vec{b}-\vec{a}|$ 连续变化，所以 $|2\vec{b}-\vec{a}|$ 的取值范围是