

微专题 11 函数零点的性质

一、基础知识：

1、函数零点，方程，图像交点的相互转化：有关零点个数及性质的问题会用到这三者的转化，且这三者各具特点：

（1）函数的零点：有“零点存在性定理”作为理论基础，可通过区间端点值的符号和函数的单调性确定是否存在零点

（2）方程：方程的特点在于能够进行灵活的变形，从而可将等号两边的表达式分别构造为两个可分析的函数，为作图做好铺垫

（3）图像的交点：通过作图可直观地观察到交点的个数，并能初步判断交点所在区间。

三者转化：函数 $f(x)$ 的零点 $\Rightarrow$ 方程 $f(x)=0$ 的根 $\xrightarrow{\text{方程变形}}$ 方程 $g(x)=h(x)$ 的根 $\Rightarrow$ 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的交点

2、此类问题的处理步骤：

（1）作图：可将零点问题转化成方程，进而通过构造函数将方程转化为两个图像交点问题，并作出函数图像

（2）确定变量范围：通过图像与交点位置确定参数和零点的取值范围

（3）观察交点的特点（比如对称性等）并选择合适的方法处理表达式的值，

3、常见处理方法：

（1）代换法：将相等的函数值设为 t ，从而用 t 可表示出 $x_1, x_2, \dots$ ，将关于 $x_1, x_2, \dots$ 的表达式转化为关于 t 的一元表达式，进而可求出范围或最值

（2）利用对称性解决对称点求和：如果 x_1, x_2 关于 $x=a$ 轴对称，则 $x_1+x_2=2a$ ；同理，若 x_1, x_2 关于 $(a,0)$ 中心对称，则也有 $x_1+x_2=2a$ 。将对称的点归为一组，在求和时可与对称轴（或对称中心）找到联系

二、典型例题：

例 1：已知函数 $f(x)=|\lg x|$ ，若 $0 < a < b$ ，且 $f(a)=f(b)$ ，则 $a+2b$ 的取值范围是（ ）

- A. $(2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

思路：先做出 $f(x)$ 的图像，通过图像可知，如果 $f(a) = f(b)$ ，则 $0 < a < 1 < b$ ，设

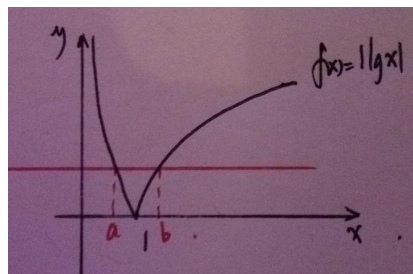
$$f(a) = f(b) = t, \text{ 即 } \begin{cases} |\lg a| = t \\ |\lg b| = t \end{cases} (t > 0), \text{ 由 } a, b \text{ 范围}$$

$$\text{可得: } \lg a < 0, \lg b > 0, \text{ 从而 } \begin{cases} \lg a = -t \\ \lg b = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e^{-t} \\ b = e^t \end{cases},$$

$$\text{所以 } a + 2b = \frac{1}{e^t} + 2e^t, \text{ 而 } e^t > 0, \text{ 所以}$$

$$2e^t + \frac{1}{e^t} \in (3, +\infty)$$

答案：C



小炼有话说：(1) 此类问题如果 $f(x)$ 图像易于作出，可先作图以便于观察函数特点

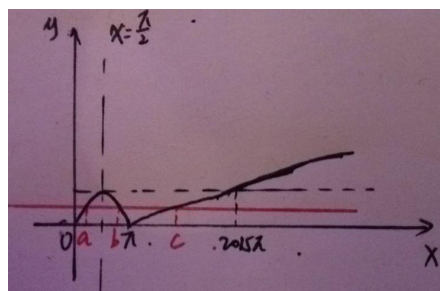
(2) 本题有两个关键点，一个是引入辅助变量 t ，从而用 t 表示出 a, b ，达到消元效果，但是要注意 t 是有范围的（通过数形结合 $y = t$ 需与 $y = f(x)$ 有两交点）；一个是通过图像判断出 a, b 的范围，从而去掉绝对值。

$$\text{例 2: 已知函数 } f(x) = \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), x \in [0, \pi] \\ \log_{2015} \frac{x}{\pi}, x \in (\pi, +\infty) \end{cases}, \text{ 若有三个不同的实数 } a, b, c, \text{ 使得}$$

$$f(a) = f(b) = f(c), \text{ 则 } a + b + c \text{ 的取值范围是}$$

思路： $f(x)$ 的图像可作，所以考虑作出 $f(x)$ 的图像，

不妨设 $a < b < c$ ，由图像可得： $f(a) = f(b) \in (0, 1)$



$$a, b \in [0, \pi], \text{ 且关于 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 轴对称, 所以有 } \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a+b = \pi, \text{ 再观察 } c > \pi, \text{ 且}$$

$$f(c) = \log_{2015} \frac{c}{\pi} = f(a) \in (0, 1), \text{ 所以 } 0 < \log_{2015} \frac{c}{\pi} < 1 \Rightarrow \pi < c < 2015\pi, \text{ 从而}$$

$$(a+b) + c = \pi + c \in (2\pi, 2016\pi)$$

答案： $(2\pi, 2016\pi)$

小炼有话说：本题抓住 a, b 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称是关键，从而可由对称求得 $a + b = \pi$ ，使得所