

微专题 48 多变量表达式的范围——数形结合

一、基础知识：

1、数形结合的适用范围：

(1) 题目条件中含有多个不等关系，经过分析后可得到关于两个变量的不等式组

(2) 所求的表达式具备一定的几何意义（截距，斜率，距离等）

2、如果满足以上情况，则可以考虑利用数形结合的方式进行解决

3、高中知识中的“线性规划”即为数形结合求多变量表达式范围的一种特殊情形，其条件与所求为双变量的一次表达式

4、有些利用数形结合解决的题目也可以使用放缩消元的方式进行处理，这要看所给的不等条件（尤其是不等号方向）是否有利于进行放缩。

二、典型例题

例 1：三次函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ($b, c, d \in R$) 在区间 $[-1, 2]$ 上是减函数，那么 $b + c$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{15}{2}\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{15}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{15}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, -\frac{15}{2}\right]$

思路：先由减函数的条件得到 b, c 的关系，

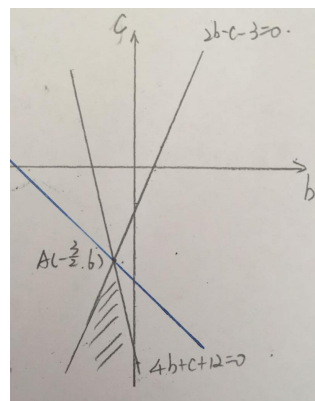
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ ，所以 $x \in [-1, 2]$ 时， $f'(x) \leq 0$ 恒成立，

通过二次函数图像可知： $\begin{cases} f'(-1) \leq 0 \\ f'(2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b - c - 3 \geq 0 \\ 4b + c + 12 \leq 0 \end{cases}$ ，由关

于 b, c 的不等式组可想到利用线性规划求得 $b + c$ 的取值范围，通

过作图可得 $b + c \leq -\frac{15}{2}$

答案：D



例 2：设 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，且对于任意的 x 都有 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 恒成立，

如果实数 m, n 满足不等式组 $\begin{cases} f(m^2 - 6m + 23) + f(n^2 - 8n) < 0 \\ m > 3 \end{cases}$ ，那么 $m^2 + n^2$ 的取值范围

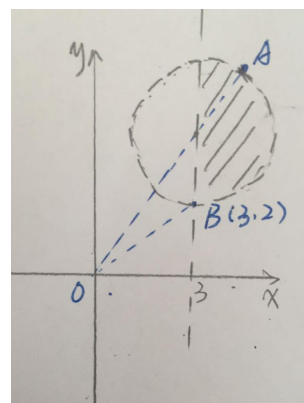
是 ()

- A. $(3, 7)$ B. $(9, 25)$ C. $(13, 49)$ D. $(9, 49)$

思路：首先考虑变形 $f(m^2 - 6m + 23) + f(n^2 - 8n) < 0$ ，若想得到 m, n 的关系，那么需要利用函数的单调性将函数值的大小转变为括号内式子的大小。由 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 可得： $f(1-x) = -f(1+x)$ ，所以 $f(x)$ 关于 $(1, 0)$ 中心对称，即 $-f(x) = f(2-x)$ ，所以：
 $f(m^2 - 6m + 23) + f(n^2 - 8n) < 0 \Rightarrow f(m^2 - 6m + 23) < -f(n^2 - 8n) = f(2 - n^2 + 8n)$
 ，利用 $f(x)$ 单调递增可得： $m^2 - 6m + 23 < 2 - n^2 + 8n \Rightarrow (m-3)^2 + (n-4)^2 < 4$ ，所以

m, n 满足的条件为 $\begin{cases} (m-3)^2 + (n-4)^2 < 4 \\ m > 3 \end{cases}$ ①，所求 $m^2 + n^2$ 可

视为点 (m, n) 到原点距离的平方，考虑数形结合。将①作出可行域，为以 $C(3, 4)$ 为圆心，半径为 2 的圆的右边部分（内部），观察图像可得该右半圆距离原点的距离范围是 $(\sqrt{13}, 7)$ ，所以
 $m^2 + n^2 \in (13, 49)$



答案：C

例 3：已知函数 $y = f(x)$ 是 R 上的减函数，函数 $y = f(x-1)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称，若实数 x, y 满足不等式 $f(x^2 - 2x) \leq -f(2y - y^2)$ ，且 $1 \leq x \leq 4$ ，则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_____

思路：从所求出发可联想到 (x, y) 与 $(0, 0)$ 连线的斜率，先分析

已知条件，由 $f(x-1)$ 对称性可知 $f(x)$ 为奇函数，再结合单调递减的性质可将所解不等式进行变形：

$$f(x^2 - 2x) \leq -f(2y - y^2) \Rightarrow f(x^2 - 2x) \leq f(y^2 - 2y) \\ \Rightarrow x^2 - 2x \geq y^2 - 2y, \text{ 即 } (x^2 - y^2) - 2(x - y) \geq 0, \text{ 所以有}$$

$(x-y)(x+y-2) \geq 0$ 。再结合 $1 \leq x \leq 4$ 可作出可行域（如图），数形结合可知 $\frac{y}{x}$ 的范围是

$$\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

答案： $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

