

微专题 20 一元不等式的证明

利用函数性质与最值证明一元不等式是导数综合题常涉及的一类问题，考察学生构造函数选择函数的能力，体现了函数最值的一个作用——每一个函数的最值带来一个恒成立的不等式。此外所证明的不等式也有可能对后一问的解决提供帮助，处于承上启下的位置。

一、基础知识：

1、证明方法的理论基础

(1) 若要证 $f(x) < C$ (C 为常数) 恒成立，则只需证明： $f(x)_{\max} < C$ ，进而将不等式的证明转化为求函数的最值

(2) 已知 $f(x), g(x)$ 的公共定义域为 D ，若 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$ ，则 $\forall x \in D, f(x) > g(x)$
证明：对任意的 $x_1 \in D$ ，有 $f(x_1) \geq f(x)_{\min}, g(x_1) \leq g(x)_{\max}$

$\therefore$ 由不等式的传递性可得： $f(x_1) \geq f(x)_{\min} > g(x)_{\max} \geq g(x_1)$ ，即 $\forall x \in D, f(x) > g(x)$

2、证明一元不等式主要的方法有两个：

第一个方法是含 x 的项或所有项均挪至不等号的一侧，将一侧的解析式构造为函数，通过分析函数的单调性得到最值，从而进行证明，其优点在于目的明确，构造方法简单，但对于移项后较复杂的解析式则很难分析出单调性

第二个方法是利用不等式性质对所证不等式进行等价变形，转化成为 $f(x) > g(x)$ 的形式，若能证明 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$ ，即可得： $f(x) > g(x)$ ，本方法的优点在于对 x 的项进行分割变形，可将较复杂的解析式拆成两个简单的解析式。但缺点是局限性较强，如果 $f(x)_{\min}$ 与 $g(x)_{\max}$ 不满足 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$ ，则无法证明 $f(x) > g(x)$ 。所以用此类方法解题的情况不多，但是在第一个方法失效的时候可以考虑尝试此法。

3、在构造函数时把握一个原则：以能够分析导函数的符号为准则。

4、若在证明 $f(x) > 0$ 中，解析式 $f(x)$ 可分解为几个因式的乘积，则可对每个因式的符号进行讨论，进而简化所构造函数的复杂度。

5、合理的利用换元简化所分析的解析式。

6、判断解析式符号的方法：

(1) 对解析式进行因式分解，将复杂的式子拆分为一个个简单的式子，判断出每个式子的符

号即可得到解析式的符号

(2) 将解析式视为一个函数，利用其零点（可猜出）与单调性（利用导数）可判断其符号

(3) 将解析式中的项合理分组，达到分成若干正项的和或者若干负项的和的结果，进而判断出解析式符号

二、典型例题：

例 1：求证： $\ln x \leq x - 1$

思路：移项构造函数求解即可

证明：所证不等式等价于： $\ln x - x + 1 \leq 0$

令 $f(x) = \ln x - x + 1$ 则只需证明： $f(x)_{\max} \leq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \text{令 } f'(x) > 0 \text{ 解得： } x < 1$$

$\therefore$

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 0 \quad \therefore f(x) \leq f(1) = 0$$

即所证不等式成立

小炼有话说：

(1) 此题的解法为证明一元不等式的基本方法，即将含 x 的项移至不等号的一侧，构造函数解决。

(2) 一些常见不等关系可记下来以备使用：

$$\textcircled{1} \ln x \leq x - 1 \quad \textcircled{2} e^x \geq x + 1 \quad \textcircled{3} x > \sin x \quad x \in (0, +\infty)$$

例 2：设函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$ ，证明：当 $x > -1$ 时， $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$

思路：本题依然考虑构造函数解决不等式，但如果仅仅是移项，则所证不等式为

$$1 - e^{-x} - \frac{x}{x+1} \geq 0, \quad \text{令 } g(x) = 1 - e^{-x} - \frac{x}{x+1}, \quad \text{其导函数比较复杂（也可解决此题），所以考}$$

虑先对不等式进行等价变形，转变为形式较为简单的不等式，再构造函数进行证明

$$\text{证明： } 1 - \frac{1}{e^x} \geq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \leq 1 - \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x+1}$$