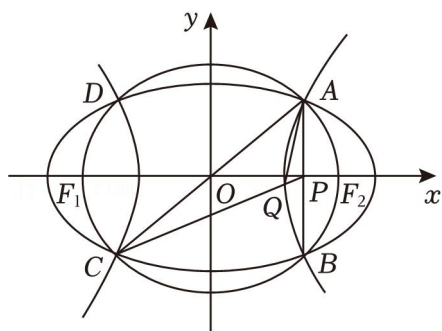


2024 年江苏省南京师大附中高考数学寒假模拟试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- (5 分) 集合 $\{z \mid z = i^n + \frac{1}{i^n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ 中的元素个数是 ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 无穷多个
- (5 分) 用数学归纳法证明: $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{n+2}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的过程中, 从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时, $f(k+1)$ 比 $f(k)$ 共增加了 ()
 A. 1 项 B. $2^k - 1$ 项 C. 2^{k+1} 项 D. 2^k 项
- (5 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - 2b$, 若 a, b 都是区间 $[0, 4]$ 内的数, 则使得 $f(1) \geq 0$ 成立的概率是 ()
 A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{8}$
- (5 分) 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的上, 下底面边长分别为 2 和 6, 侧棱长为 4, 以下底面顶点 A 为球心, $2\sqrt{7}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为 ()
 A. $\frac{2\pi}{3}$ B. π C. $\frac{4\pi}{3}$ D. 2π
- (5 分) 设 $a = \sin 0.2$, $b = 0.16$, $c = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$, 则 ()
 A. $a > c > b$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
- (5 分) 17 到 19 世纪间, 数学家们研究了用连分式求解代数方程的根, 并得到连分式的一个重要功能: 用其逼近实数求近似值. 例如, 把方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 改写成 $x = 1 + \frac{1}{x}$ ①, 将 x 再代入等式右边得到 $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, 继续利用 ① 式将 x 再代入等式右边得到 $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$... 反复进行, 取 $x=1$ 时, 由此得到数列 $1, 1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \dots$, 记作 $\{a_n\}$, 则当 n 足够大时, a_n 逼近实数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 数列 $\{a_n\}$ 的前 2024 项中, 满足 $|a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}| < 0.005$ 的 a_n 的个数为 (参考数据: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$) ()
 A. 1007 B. 1009 C. 2014 D. 2018
- (5 分) 如图, 已知椭圆 C_1 和双曲线 C_2 具有相同的焦点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, A, B, C, D 是它们的公共点, 且都在圆 $x^2 + y^2 = c^2$ 上, 直线 AB 与 x 轴交于点 P , 直线 CP 与双曲线 C_2 交于点 Q , 记直

线 AC 、 AQ 的斜率分别为 k_1 、 k_2 ，若椭圆 C_1 的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，则 $k_1 \cdot k_2$ 的值为（ ）



- A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 4

8. (5 分) 若椭圆 C_1 和 C_2 的方程分别为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 和 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ ($a > b > 0$, $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$),

则称 C_1 和 C_2 为相似椭圆. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, $C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$), 过 C_2 上任意一

点 P 作直线交 C_1 于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$, 则 $\triangle MON$ 的面积最大时, λ 的值为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有错选得 0 分.

(多选) 9. (6 分) 已知当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$, 则（ ）

- A. $\frac{10}{9} < e^{\frac{1}{9}} < \frac{9}{8}$
 B. $\ln 9 < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} < \ln 10$
 C. $(\frac{10}{e})^9 < 9!$
 D. $(\frac{C_9^0}{9^0})^2 + (\frac{C_9^1}{9^1})^2 + \dots + (\frac{C_9^9}{9^9})^2 < e$

(多选) 10. (6 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上有一点 P , F_1, F_2 分别为左、右焦点, $\angle F_1PF_2 = \theta$, $\triangle$

PF_1F_2 的面积为 S , 则下列选项正确的是（ ）

- A. 若 $\theta = 60^\circ$, 则 $S = 3\sqrt{3}$
 B. 若 $S = 9$, 则 $\theta = 90^\circ$