

2024 年江苏省南京市宁海中学高考数学考前模拟试卷

一、单选题

- 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$, $B = \{y | y = \ln(x^2 + 1)\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $[-1, 4]$ B. $[0, 1]$ C. $(0, 4]$ D. $[0, 4]$
- 已知复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 若 $z + 2 = (1 - i)\bar{z}$, 则 $|z| =$ ()
 A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{6}$ D. 6
- 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影为 $\frac{1}{3}\vec{b}$, 且 $|3\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$
- 已知 $\theta \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$, 且 $\frac{\cos 2\theta}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \cos \theta + \sin \theta$, 则 $\sin 2\theta + 6\cos^2 \theta =$ ()
 A. 2 B. $\frac{28}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{5}$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 与 C 的渐近线在第二象限的交点为 P , 若 $\tan \angle FPO = \sqrt{2}$, 则 C 的离心率为 ()
 A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$
- 已知 $SO_1 = 2$, 底面半径 $O_1A = 4$ 的圆锥内接于球 O , 则经过 S 和 O_1A 中点的平面截球 O 所得截面面积的最小值为 ()
 A. $\frac{25}{2}\pi$ B. $\frac{25}{3}\pi$ C. $\frac{25}{4}\pi$ D. 5π
- 对于数列 $\{x_n\}$, 若存在正数 M , 使得对一切正整数 n , 恒有 $|x_n| \leq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有界; 若这样的正数 M 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 无界, 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = \ln(\lambda a_n + 1)$ ($\lambda > 0$), 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则下列结论正确的是 ()
 A. 当 $\lambda = 1$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 有界 B. 当 $\lambda = 1$ 时, 数列 $\{T_n\}$ 有界
 C. 当 $\lambda = 2$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 有界 D. 当 $\lambda = 2$ 时, 数列 $\{T_n\}$ 有界

二、多选题

- (多选) 9. 已知一组样本数据 x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$), 其中 x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$) 为正实数. 满足

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{10}$, 下列说法正确的是 ()

- A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_8
- B. 去掉样本的一个数据, 样本数据的极差可能不变
- C. 若样本数据的频率分布直方图为单峰不对称, 且在右边“拖尾”, 则样本数据的平均数大于中位数

D. 若样本数据的方差 $s^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 4$, 则这组样本数据的平均数等于 2

(多选) 10. 已知 $a > 0, b > 0, a^2 + b^2 - ab = 1$, 下列不等式恒成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$
- B. $a + b \geq 2$
- C. $a^3 + b^3 \leq 2$
- D. $0 < b \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(多选) 11. 定义在 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足如下条件: ① $f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x}$; ② 当 $x > 1$ 时,

$f(x) > 0$. 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(1) = 0$
- B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$
- C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减
- D. 不等式 $(2-x)f(x-2) \geq xf(x)$ 的解集为 $(2, \sqrt{2}+1]$

三、填空题

12. $(x^2+2x+3)(2x+1)^6$ 的展开式中, x^2 的系数是 _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边依次为 a, b, c , $\sin \frac{2A+B}{2} - \cos^2 C = \frac{1}{2}$, $c=2$, $A=\frac{\pi}{4}$, $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

14. 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 80$, 点 P 在直线 $l: y=kx+7$ ($k \in \mathbb{R}$) 上. 若存在过点 P 的直线与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=16$, $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{11} \overrightarrow{PB}$, 则 k 的取值范围是 _____.

四、解答题

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{2n-1} - 6\}$ 为等比数列;

(2) 若 $b_n = a_{2n}$, 求数列 $\{n \cdot (b_n - 3)\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. 如图, 在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp AB$, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC , $AA_1 = A_1B_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB = 1$.

(I) 证明: $BA_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;