

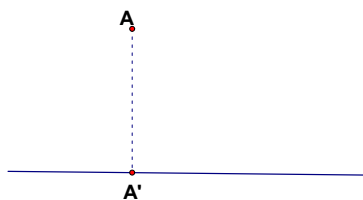
微专题 38 向量的数量积——数量积的投影定义

一、基础知识

1、向量的投影：

(1) 有向线段的值：设有一轴 l ， $\overrightarrow{AB}$ 是轴上的有向线段，如果实数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$ ，且当 $\overrightarrow{AB}$ 与轴同向时， $\lambda > 0$ ，当 $\overrightarrow{AB}$ 与轴反向时， $\lambda < 0$ ，则称 λ 为轴 l 上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值。

(2) 点在直线上的投影：若点 A 在直线 l 外，则过 A 作 $AA' \perp l$ 于 A' ，则称 A' 为 A 在直线 l 上的投影；若点 A 在直线 l 上，则 A 在 A 在直线 l 上的投影 A' 与 A 重合。所以说，投影往往伴随着垂直。



(3) 向量的投影：已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，若 $\vec{a}$ 的起点 A, B 在 $\vec{b}$ 所在轴 l （与 $\vec{b}$ 同向）上的投影分别为 A', B' ，则向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 在轴 l 上的值称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影，向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量。

2、向量的投影与向量夹角的关系：通过作图可以观察到，向量的夹角将决定投影的符号，记 θ 为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角

(1) θ 为锐角：则投影（无论是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影还是 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影）均为正

(2) θ 为直角：则投影为零

(3) θ 为钝角：则投影为负

3、投影的计算公式：以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影 λ 为例，通过构造直角三角形可以发现

(1) 当 θ 为锐角时， $|\lambda| = |\vec{b}| \cos \theta$ ，因为 $\lambda > 0$ ，所以 $\lambda = |\vec{b}| \cos \theta$

(2) 当 θ 为钝角时， $|\lambda| = |\vec{b}| \cos(\pi - \theta) = -|\vec{b}| \cos \theta$ ，因为 $\lambda < 0$ ，所以 $-\lambda = -|\vec{b}| \cos \theta$ 即 $\lambda = |\vec{b}| \cos \theta$

(3) 当 θ 为直角时， $\lambda = 0$ ，而 $\cos \theta = 0$ ，所以也符合 $\lambda = |\vec{b}| \cos \theta$

综上可得： $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影 $\lambda = |\vec{b}| \cos \theta$ ，即被投影向量的模乘以两向量的夹角

4、数量积与投影的关系（数量积的几何定义）：

向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 数量积公式为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，可变形为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \cos \theta)$ 或 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot (|\vec{a}| \cos \theta)$ ，进而与向量投影找到联系

(1) 数量积的投影定义：向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积等于其中一个向量的模长乘以另一个向量在该向量上的投影，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \lambda_{\vec{a} \rightarrow \vec{b}}$ （记 $\lambda_{\vec{a} \rightarrow \vec{b}}$ 为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影）

(2) 投影的计算公式：由数量积的投影定义出发可知投影也可利用数量积和模长进行求解：

$$\lambda_{\vec{a} \rightarrow \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

即数量积除以被投影向量的模长

5、数量积投影定义的适用范围：作为数量积的几何定义，通常适用于处理几何图形中的向量问题

(1) 图形中出现与所求数量积相关的垂直条件，尤其是垂足确定的情况下（此时便于确定投影），例如：直角三角形，菱形对角线，三角形的外心（外心到三边投影为三边中点）

(2) 从模长角度出发，在求数量积的范围中，如果所求数量积中的向量中有一个模长是定值，则可以考虑利用投影，从而将问题转化为寻找投影最大最小的问题

二、典型例题：

例 1：已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ ，且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$ ，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为（ ）

- A. 3 B. -3. C. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

思路：考虑 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ ，所以只需求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 即可。由 $\vec{a} \perp \vec{a} + \vec{b}$ 可得：

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ 所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -9. \text{ 进而 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-9}{3} = -3$$

答案：C

小炼有话说：本题主要应用投影的计算公式，注意在哪个向量投影，使用数量积除以该向量的模长

例 2：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 4, \angle ABC = 30^\circ$ ， AD 是边 BC 上的高，则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值等于（ ）

