微专题46　多变量表达式的范围——消元法

一、基础知识：

1、消元的目的：若表达式所含变量个数较多，则表达式的范围不易确定（会受多个变量的取值共同影响），所以如果题目条件能够提供减少变量的方式，则通常利用条件减少变量的个数，从而有利于求表达式的范围（或最值），消元最理想的状态是将多元表达式转为一元表达式，进而可构造函数求得值域

2、常见消元的方法：

（1）利用等量关系消元：若题目中出现了变量间的关系（等式），则可利用等式进行消元，在消元的过程中要注意以下几点：

① 要确定主元：主元的选取有这样几个要点：一是主元应该有比较明确的范围（即称为函数的定义域）；二是构造出的函数能够解得值域（函数结构不复杂）

② 若被消去的元带有范围，则这个范围由主元承担。例如选择 t 为主元，且有 $x=f\left(t\right),a\le x\le b$，则 t 除了满足自身的范围外，还要满足 $a\le f\left(t\right)\le b$（即解不等式）

（2）换元：常见的换元有两种：

①整体换元：若多元表达式可通过变形，能够将某一个含多变量的式子视为一个整体，则可通过换元转为一元表达式，常见的如 $\frac{y}{x},y-x$ 等，例如在 $u=\frac{x-y}{x+y}$ 中，可变形为 $u=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$，设 $t=\frac{y}{x}$，则将问题转化为求 $u=\frac{1-t}{1+t}$ 的值域问题

注：在整体换元过程中要注意视为整体的式子是否存在范围，即要确定新元的范围

②三角换元：已知条件为关于 x,y 的二次等式时，可联想到三角公式，从而将 x,y 的表达式转化为三角函数表达式来求得范围。因为三角函数公式的变形与多项式变形的公式不同，所以在有些题目中可巧妙的解决问题，常见的三角换元有：

平方和：联想到正余弦平方和等于1，从而有：$x^2+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases},\theta\in\left[0,2\pi\right)$

推广：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases},\theta\in\left[0,2\pi\right)$

平方差：联想到正割（$\frac{1}{\cos\theta}$）与正切（$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$）的平方差为1，则有

$$x^2-y^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}\\ y=\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\end{cases},\theta\in\left[0,2\pi\right),$$

推广：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=a\sec\theta=\dfrac{a}{\cos\theta}\\ y=b\tan\theta=\dfrac{b\sin\theta}{\cos\theta}\end{cases},\theta\in\left[0,2\pi\right)$

注：若x,y有限定范围时，要注意对θ取值的影响，一般地，若$\left(x,y\right)$的取值范围仅仅以象限为界，则可用对应象限角的取值刻画θ的范围

3、消元后一元表达式的范围求法：

（1）函数的值域——通过常见函数，或者利用导数分析函数的单调性，求得函数值域

（2）均值不等式：若表达式可构造出具备使用均值不等式（$a+b\geq 2\sqrt{ab}$等）的条件，则可利用均值不等式快速得到最值。

（3）三角函数：

① 形如$a\sin\theta+b\cos\theta$的形式：则可利用公式转化为$A\sin\left(\omega\theta+\varphi\right)$的形式解得值域（或最值）

② 形如$f\left(\sin\theta\right)$：则可通过换元$t=\sin\theta$将其转化为传统函数进行求解

③ 形如：$\dfrac{\sin\theta-a}{\cos\theta-b}$，可联想到此式为点$\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$和定点$\left(a,b\right)$连线的斜率，其中$\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$为单位圆上的点，通过数形结合即可解得分式范围

二、典型例题：

例 1：设实数a,x,y满足$\begin{cases}x+y=2a-1\\ x^2+y^2=a^2+2a-3\end{cases}$，则$xy$的取值范围是_________

思路：考虑xy可用$x+y,x^2+y^2$进行表示，进而得到关于a的函数，再利用不等式组中$x+y,x^2+y^2$天然成立的大小关系确定a的范围，再求出函数值域即可

解：$xy=\dfrac{1}{2}\left[\left(x+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left[\left(2a-1\right)^2-\left(a^2+2a-3\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(3a^2-6a+4\right)$

由$\begin{cases}x+y=2a-1\\ x^2+y^2=a^2+2a-3\end{cases}$及$\left(x+y\right)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)$（*）可得：$\left(2a-1\right)^2\leq 2\left(a^2+2a-3\right)$，