微专题40 利用函数性质与图像解不等式

高中阶段解不等式大体上分为两类，一类是利用不等式性质直接解出解集（如二次不等式，分式不等式，指对数不等式等）；一类是利用函数的性质，尤其是函数的单调性进行运算。相比而言后者往往需要构造函数，利用函数单调性求解，考验学生的观察能力和运用条件能力，难度较大。本章节以一些典型例题来说明处理这类问题的常规思路。

一、基础知识：

（一）构造函数解不等式

1、函数单调性的作用：$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$单调递增，则

$\forall x_1,x_2\in\left[a,b\right],x_1<x_2\Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ **(在单调区间内，单调性是自变量大小关系与函数值大小关系的桥梁）**

2、假设$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上连续且单调递增，$\exists x_0\in\left(a,b\right),f\left(x_0\right)=0$，则$x\in\left(a,x_0\right)$时，$f\left(x\right)<0$；$x\in\left(x_0,b\right)$时，$f\left(x\right)>0$ **(单调性与零点配合可确定零点左右点的函数值的符号）**

3、导数运算法则：

（1）$\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)'=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$

（2）$\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)'=\dfrac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}$

4、构造函数解不等式的技巧：

（1）此类问题往往条件比较零散，不易寻找入手点。所以处理这类问题要将条件与结论结合着分析。在草稿纸上列出条件能够提供什么，也列出要得出结论需要什么。两者对接通常可以确定入手点

（2）在构造函数时要根据条件的特点进行猜想，例如出现轮流求导便猜有可能是具备乘除关系的函数。在构造时多进行试验与项的调整

（3）此类问题处理的核心要素是单调性与零点，对称性与图像只是辅助手段。所以如果能够确定构造函数的单调性，猜出函数的零点。那么问题便易于解决了。

（二）利用函数性质与图像解不等式：

1、轴对称与单调性：此类问题的实质就是自变量与轴距离大小与其函数值大小的等价关系。通常可作草图帮助观察。例如：$f\left(x\right)$的对称轴为$x=1$，且在$\left(1,+\infty\right)$但增。则可以作出草图

（不比关心单调增的情况是否符合 $f\left(x\right)$，不会影响结论），得到：距离 $x=1$ 越近，点的函数值越小。从而得到函数值与自变量的等价关系

2、图像与不等式：如果所解不等式不便于用传统方法解决，通常的处理手段有两种，一类是如前文所说可构造一个函数，利用单调性与零点解不等式；另一类就是将不等式变形为两个函数的大小关系如 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$，其中 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 的图像均可作出。再由 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$ 可知 $f\left(x\right)$ 的图像在 $g\left(x\right)$ 图像的下方。按图像找到符合条件的范围即可。

二、典型例题：

例 1：定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的可导函数 $f\left(x\right)$ 满足：$xf'\left(x\right)<f\left(x\right)$，$f\left(1\right)=0$，则 $\dfrac{f\left(x\right)}{x}<0$ 的解集为（　　）

A. $\left(0,1\right)$　　B. $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　C．$\left(1,+\infty\right)$　　D. $\varnothing$

思路：本题并没有 $f\left(x\right)$ 的解析式，所以只能考虑利用函数的单调性来解不等式。由条件 $xf'\left(x\right)<f\left(x\right)$ 可得 $xf'\left(x\right)-f\left(x\right)<0$，进而联想到有可能是通过导数的乘除运算法则所得，再结合所解不等式 $\dfrac{f\left(x\right)}{x}<0$，发现 $\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right)'=\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}$，刚好与条件联系起来，故设 $F\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$，则 $F'\left(x\right)=\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right)'=\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}<0\Rightarrow F\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减。$F\left(1\right)=\dfrac{f\left(1\right)}{1}=0$，所以 $\dfrac{f\left(x\right)}{x}<0$ 的解集为 $\left(1,+\infty\right)$

答案：C

小炼有话说：

（1）在解题过程中目标要明确：既然不能用传统方法解不等式，则要靠函数单调性，进而目标为构造函数并求单调性，要确定单调性则要分析所构造函数的导函数的符号

（2）此题构造的关键点有二：一是 $xf'\left(x\right)<f\left(x\right)$ 轮流求导的特点，进而联想到导数乘除法运算，二是所求不等式所给予的“暗示”。所以解此类题目一定要让条件与结论“对上话”

（3）体会条件 $f\left(1\right)=0$ 的作用：提供零点以便配合单调性求解

例 2：函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-1)=2$，对任意的 $x\in R$，有 $f'(x)>2$，则 $f(x)>2x+4$