微专题03 利用数轴解决集合运算问题

数形结合是解决高中数学问题的常用手段，其优点在于通过图形能够直观的观察到某些结果，与代数的精确性结合，能够快速解决一些较麻烦的问题。在集合的运算中，涉及到单变量的取值范围，数轴就是一个非常好用的工具，本文将以一些题目为例，来介绍如何使用数轴快速的进行集合的交并运算。

一、基础知识：

1、集合运算在数轴中的体现：

$A\bigcap B$：在数轴上表示为A,B表示区域的公共部分

$A\bigcup B$：在数轴上表示为A,B表示区域的总和

$C_U A$：在数轴上表示为U中除去A剩下的部分（要注意边界值能否取到）

2、问题处理时的方法与技巧：

（1）涉及到单变量的范围问题，均可考虑利用数轴来进行数形结合，尤其是对于含有参数的问题时，由于数轴左边小于右边，所以能够以此建立含参数的不等关系

（2）在同一数轴上作多个集合表示的区间时，可用不同颜色或不同高度来区分各个集合的区域。

（3）涉及到多个集合交并运算时，数轴也是得力的工具，从图上可清楚的看出公共部分和集合包含区域。交集即为公共部分，而并集为覆盖的所有区域

（4）在解决含参数问题时，作图可先从常系数的集合（或表达式）入手，然后根据条件放置参数即可

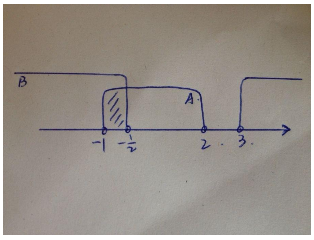
3、作图时要注意的问题：

（1）在数轴上作图时，若边界点不能取到，则用空心点表示；若边界点能够取到，则用实心点进行表示，这些细节要在数轴上体现出来以便于观察

（2）处理含参数的问题时，要检验参数与边界点重合时是否符合题意。

二、例题精析：

例1：（2009 安徽）集合$A=\left\{x\left||2x-1|<3\right.\right\},B=\left\{x\left|\frac{2x+1}{3-x}<0\right.\right\}$，则$A\bigcap B=$______

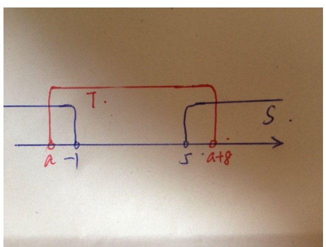


思路：先解出A,B的解集，$A=(-1,2),B=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\bigcup(3,+\infty)$，作出数轴，则$A\bigcap B$即为它们的公共部分。$A\bigcap B=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

答案：$A\bigcap B=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

例2：设集合$S=\left\{x\left||x-2|>3\right.\right\},T=\{x\,|\,a<x<a+8\},S\bigcup T=R$，则$a$的取值范围是____

思路：可解出$S=(-\infty,-1)\bigcup(5,+\infty)$，而$T$集合含有参数，作出数轴，先从容易作图的集合做起，即画出S的范围，由于$S\bigcup T=R$，而数轴上有一



部分区域没有被S包含，那说明T集合负责补S空缺的部分，由于参数决定其端点位置，所以画出图像，有图像观察可得只需要：$\begin{cases} a<-1 \\ a+8>5 \end{cases}$ 即可，解得：$-3<a<-1$

答案：$-3<a<-1$

小炼有话说：（1）含有参数的问题时，可考虑参数所起到的作用，在本题中参数决定T区间的端点

（2）含有参数的问题作图时可先考虑做出常系数集合的图像，再按要求放置含参的集合

（3）注意考虑端点处是否可以重合，通常采取验证的方法，本题若$a=-3$或$a=-1$，则端点处既不在S里，也不在T里，不符题意。

例 3：对于任意的$x\in R$，满足$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$恒成立的所有实数a构成集合A，使不等式$|x-4|+|x-3|<a$的解集是空集的所有实数a构成集合B，则$A\cap(C_RB)=$______

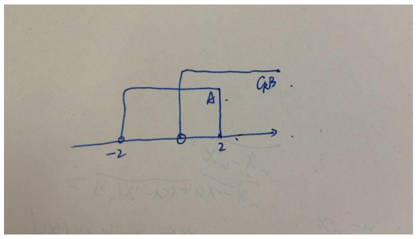
思路：先利用已知条件求出A,B，再利用数轴画出$A\cap C_RB$的范围即可

解：由$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ ① 恒成立，可得：

当$a-2=0$即$a=2$时，①变为：$-4<0$恒成立

当$a\neq 2$时，若要①恒成立，则

$$\begin{cases} a-2<0 \\ \Delta=4(a-2)^2+16(a-2)<0 \end{cases} \Rightarrow -2<a<2$$



$\therefore A=(-2,2]$

$|x-4|+|x-3|<a$解集为空等价于：$\forall x\in R,|x-4|+|x-3|\geq a$

$a\leq\left(|x-4|+|x-3|\right)_{\min}$

设$f(x)=|x-4|+|x-3|=\begin{cases} 2x-7,x>4 \\ 1, \quad 3<x\leq 4 \\ 7-2x,x\leq 3 \end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min}=1 \qquad \therefore a\leq 1$即$B=(-\infty,1]$

$\therefore C_RB=(1,+\infty)$

$\therefore A\cap C_RB=(1,2]$

小炼有话说：本题更多考察的地方在于A,B集合的求解。A集合要注意$a-2=0$的情况，而不能默认为二次不等式，B集合涉及解集与不等式恒成立问题之间的转化。在集合进行交并运算时，数轴将成为一个非常直观的工具，作图时要注意端点值的开闭。