

微专题 07 分段函数的性质与应用

分段函数是函数中比较复杂的一种函数，其要点在于自变量取不同范围的值时所使用的解析式不同，所以在解决分段函数的问题时要时刻盯着自变量的范围是否发生变化。即“分段函数——分段看”

一、基础知识：

1、分段函数的定义域与值域——各段的并集

2、分段函数单调性的判断：先判断每段的单调性，如果单调性相同，则需判断函数是连续的还是断开的，如果函数连续，则单调区间可以合在一起，如果函数不连续，则要根据函数在两段分界点出的函数值（和临界值）的大小确定能否将单调区间并在一起。

3、分段函数对称性的判断：如果能够将每段的图像作出，则优先采用图像法，通过观察图像判断分段函数奇偶性。如果不便作出，则只能通过代数方法比较 $f(x), f(-x)$ 的关系，要注意 $x, -x$ 的范围以代入到正确的解析式。

4、分段函数分析要注意的几个问题

(1) 分段函数在图像上分为两类，连续型与断开型，判断的方法为将边界值代入每一段函数（其中一段是函数值，另外一段是临界值），若两个值相等，那么分段函数是连续的。否则是

断开的。例如： $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 3 \\ x^2-4, & x > 3 \end{cases}$ ，将 $x=3$ 代入两段解析式，计算结果相同，那么此分

段函数图像即为一条连续的曲线，其性质便于分析。再比如 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 3 \\ x^2-1, & x > 3 \end{cases}$ 中，两段

解析式结果不同，进而分段函数的图像是断开的两段。

(2) 每一个含绝对值的函数，都可以通过绝对值内部的符号讨论，将其转化为分段函数。例

如： $f(x) = |x-1|+3$ ，可转化为： $f(x) = \begin{cases} x-1+3, & x \geq 1 \\ 1-x+3, & x < 1 \end{cases}$

5、遇到分段函数要时刻盯住变量的范围，并根据变量的范围选择合适的解析式代入，若变量的范围并不完全在某一段中，要注意进行分类讨论

6、如果分段函数每一段的解析式便于作图，则在解题时建议将分段函数的图像作出，以便必要时进行数形结合。

二、典型例题

例 1：已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x+1 & x < 1 \\ x^2+ax & x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $f[f(0)] = 4a$ ，则实数 $a =$ _____

思路：从里向外一层层求值， $f(0) = 2^0 + 1 = 2 \quad \therefore f(f(0)) = f(2) = 4 + 2a$

所以 $4 + 2a = 4a \Rightarrow a = 2$

答案： $a = 2$

例 2: 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x > 0 \\ f(x+1) - 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f\left(-\frac{10}{3}\right)$ 的值为_____

思路: 由 $f(x)$ 解析式可知, 只有 $x > 0$, 才能得到具体的数值, $x < 0$ 时只能依靠

$f(x) = f(x+1) - 1$ 向 $x > 0$ 正数进行靠拢。由此可得:

$$f\left(-\frac{10}{3}\right) = f\left(-\frac{7}{3}\right) - 1 = f\left(-\frac{4}{3}\right) - 2 = f\left(-\frac{1}{3}\right) - 3 = f\left(\frac{2}{3}\right) - 4, \text{ 而}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \therefore f\left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{9}{2}$$

答案: $-\frac{9}{2}$

小炼有话说: 含有抽象函数的分段函数, 在处理里首先要明确目标, 即让自变量向有具体解析式的部分靠拢, 其次要理解抽象函数的含义和作用 (或者对函数图象的影响) 比如在本题中: $x < 0, f(x) = f(x+1) - 1$ 可以立即为间隔为 1 的自变量, 函数值差 1, 其作用在于自变量取负数时, 可以不断 +1 直至取到正数。理解到这两点, 问题自然迎刃而解。

例 3: 函数 $f(x) = \begin{cases} |3x-4|, & x \leq 2 \\ \frac{2}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集是()

A. $(-\infty, 1) \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

B. $[-\infty, 1] \cup \left[\frac{5}{3}, 3\right]$

C. $\left[1, \frac{5}{3}\right]$

D. $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$

思路: 首先要把 $f(x) \geq 1$ 转变为具体的不等式, 由于 $f(x)$ 是分段函数, 所以要对 x 的范围

分类讨论以代入不同的解析式: 当 $x \leq 2$ 时, $f(x) \geq 1 \Rightarrow |3x-4| \geq 1$, 可解得: $x \leq -1$ 或

$x \geq \frac{5}{3}$ 。所以 $x \leq -1$ 或 $\frac{5}{3} \leq x \leq 2$; 当 $x > 2$ 时, $f(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{x-1} \geq 1 \Rightarrow 2 \geq x-1$ 解得 $x \leq 3$,

所以 $2 < x \leq 3$, 综上所述: $x \in [-\infty, 1] \cup \left[\frac{5}{3}, 3\right]$

答案: B

例 4: 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$, 则不等式 $x+(x+1)f(x+1) \leq 1$ 的解集是_____

思路: 要想解不等式, 首先要把 $f(x+1)$ 转变为具体的表达式, 观察已知分段函数,