

## 微专题 43 线性规划——作图与求解

### 一、基础知识

#### 1、相关术语：

- (1) 线性约束条件：关于变量  $x, y$  的一次不等式（或方程）组
- (2) 可行解：满足线性约束条件的解  $(x, y)$
- (3) 可行域：所有可行解组成的集合
- (4) 目标函数：关于  $x, y$  的函数解析式
- (5) 最优解：是目标函数取得最大值或最小值的可行解

#### 2、如何在直角坐标系中作出可行域：

- (1) 先作出围成可行域的直线，利用“两点唯一确定一条直线”可选取直线上的两个特殊点（比如坐标轴上的点），以便快速做出直线
- (2) 如何判断满足不等式的区域位于直线的哪一侧：一条曲线（或直线）将平面分成若干区域，则在同一区域的点，所满足不等式的不等号方向相同，所以可用特殊值法，利用特殊点判断其是否符合不等式，如果符合，则该特殊点所在区域均符合该不等式，具体来说有以下三种情况：
  - ① 竖直线  $x = a$  或水平线  $y = b$ ：可通过点的横（纵）坐标直接进行判断
  - ② 一般直线  $y = kx + b (kb \neq 0)$ ：可代入  $(0, 0)$  点进行判断，若符合不等式，则原点所在区域即为不等式表示区域，否则则为另一半区域。例如：不等式  $x - 2y + 3 \leq 0$ ，代入  $(0, 0)$  符合不等式，则  $x - 2y + 3 \leq 0$  所表示区域为直线  $x - 2y + 3 = 0$  的右下方
  - ③ 过原点的直线  $y = kx (k \neq 0)$ ：无法代入  $(0, 0)$ ，可代入坐标轴上的特殊点予以解决，或者利用象限进行判断。例如： $y \leq x$ ：直线  $y = x$  穿过一、三象限，二、四象限分居直线两侧。考虑第四象限的点  $x > 0, y < 0$ ，所以必有  $y \leq x$ ，所以第四象限所在区域含在  $y \leq x$  表示的区域之中。
- (3) 在作可行域时要注意边界是否能够取到：对于约束条件  $F(x, y) > 0$ （或  $F(x, y) < 0$ ）边界不能取值时，在图像中边界用虚线表示；对于约束条件  $F(x, y) \geq 0$ （或  $F(x, y) \leq 0$ ）边界能取值时，在图像中边界用实线表示

### 3、利用数形结合寻求最优解的一般步骤

(1) 根据约束条件，在平面直角坐标系中作出可行域所代表的区域

(2) 确定目标函数  $z$  在式子中的几何意义，常见的几何意义有：（设  $a, b$  为常数）

① 线性表达式——与纵截距相关：例如  $z = ax + by$ ，则有  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{z}{b}$ ，从而  $z$  的取值与动直线的纵截距相关，要注意  $b$  的符号，若  $b > 0$ ，则  $z$  的最大值与纵截距最大值相关；若  $b < 0$ ，则  $z$  的最大值与纵截距最小值相关。

② 分式——与斜率相关（分式）：例如  $z = \frac{y-b}{x-a}$ ：可理解为  $z$  是可行域中的点  $(x, y)$  与定点  $(a, b)$  连线的斜率。

③ 含平方和——与距离相关：例如  $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ ：可理解为  $z$  是可行域中的点  $(x, y)$  与定点  $(a, b)$  距离的平方。

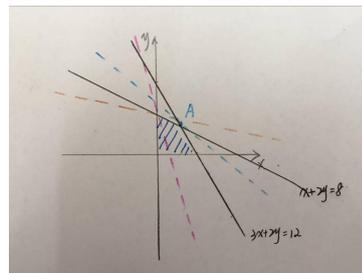
(3) 根据  $z$  的意义寻找最优解，以及  $z$  的范围（或最值）

4、线性目标函数影响最优解选取的要素：当目标函数直线斜率与约束条件直线斜率符号相同时，目标函数直线斜率与约束条件直线斜率的大小会影响最优解的选取。

例如：若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + 4y$  的最大值等于\_\_\_\_\_

作出可行域如图所示，直线  $3x + 2y = 12$  的斜率  $k_1 = -\frac{3}{2}$ ，直线  $x + 2y = 8$  的斜率  $k_2 = -\frac{1}{2}$ ，目标函数的斜率  $k = -\frac{3}{4}$ ，所以  $|k_2| < |k| < |k_1|$ ，所以在平移直线时，目标函数直线的倾斜程度要介于两直线之间，从而可得到在  $A(2, 3)$  取得最优解。但在作图中如果没有考虑斜率间的

联系，平移的直线比  $x + 2y = 8$  还要平，则会发现最优解在  $B(0, 4)$  处取得，以及若平移的直线比  $3x + 2y = 12$  还要陡，则会发现最优解在  $C(4, 0)$  处取得，都会造成错误。所以在处理目标函数与约束条件的关系时，要观察斜率的大小，并确定直线间“陡峭”程度的不同。



(1) 在斜率符号相同的情况下： $|k|$  越大，则直线越“陡”