微专题13 利用数学模型解决实际问题

一、基础知识：

1、使用函数模型解决实际问题

（1）题目特点：叙述中体现两个变量之间的关系（涉及的量也许有多个，但均能够用两个核心变量进行表示）。以其中一个为自变量，则另一个变量可视为自变量的函数，进而搭建出函数模型，再根据导数，均值不等式等工具求出最值

（2）需用到的数学工具与知识点：

① 分段函数：当自变量的不同取值导致解析式不同时，可通过建立分段函数来体现两个变量之间的关系，在题目中若有多种情况，且不同的情况对应不同的计算方式，则通常要用分段函数进行表示。

② 导数：在求最值的过程中，若函数解析式不是常见的函数（二次函数，对勾函数等），则可利用导数分析其单调性，进而求得最值

③ 均值不等式：在部分解析式中（可构造和为定值或积为定值）可通过均值不等式迅速的找到最值。

④ 分式函数的值域问题：可通过分离常数对分式进行变形，并利用换元将其转化为熟悉的函数求解

（3）常见的数量关系：

① 面积问题：可通过寻底找高进行求解，例如：

平行四边形面积＝底×高　　　　梯形面积$=\dfrac{1}{2}\times$（上底＋下底）×高

三角形面积$=\dfrac{1}{2}\times$底×高

② 商业问题：

总价＝单价×数量　　　　利润＝营业额－成本＝货物单价×数量－成本

③ 利息问题：

利息＝本金×利率　　　　本息总和＝本金＋利息＝本金×利率＋本金

（4）在解决实际问题时要注意变量的取值范围应与实际情况相符，例如：涉及到个数时，变量应取正整数。涉及到钱，速度等问题，变量的取值应该为正数。

2、使用线性规划模型解决实际问题

（1）题目特点：叙述中也有两个核心变量，但条件多为涉及两核心变量的不等关系，且所求是关于两个核心变量的表达式，这类问题通常使用线性规划模型来解决问题

（2）与函数模型的不同之处

① 函数模型：体现两核心变量之间的等量关系，根据一个变量的范围求另一个变量的范围（或最值）

② 线性规划模型：体现关于两变量的不等关系，从而可列出不等式组，要解决的是含两个变量的表达式的最值。

（3）解题步骤：根据题目叙述确定未知变量（通常选择两个核心变量，其余变量用这两个进行表示），并列出约束条件和目标函数，然后利用数形结合的方式进行解决

（4）注意事项：在实际问题中，变量的取值有可能为整数，若最优解不是整数，则可在最优解附近寻找几对整点，代入到目标函数中并比较大小

3、使用三角函数模型解决实际问题

（1）题目特点：题目以几何图形（主要是三角形）作为基础，条件多与边角相关

（2）需要用到的数学工具与知识点：

① 正弦定理：设$\triangle ABC$三边a,b,c所对的角分别为A,B,C，则有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

② 余弦定理（以a和对角A为例），$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

③ 三角函数表达式的化简与变形

④ 函数$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$的值域

（3）解题技巧与注意事项：

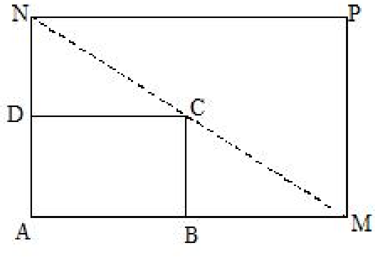
① 在求边角问题时，应把所求的边或角放在合适的三角形中

② 在直角三角形里，已知一条边，则其它边可用该边与内角的三角函数值进行表示

③ 在图形中要注意变量的取值范围

二、典型例题：

例 1：如图所示，将一矩形花坛$ABCD$扩建成一个更大的矩形花坛$AMPN$，要求M在AB 的延长线上，N在AD的延长线上，且对角线MN过C点。已知$AB=3$米，$AD=2$米。



（1）设$AN=x$（单位：米），要使花坛$AMPN$的面积大于 32 平方米，求x的取值范围；

（2）若$x\in[3,4)$（单位：米），则当AM,AN的长度分别是多少时，花坛$AMPN$的面积最大？并求出最大面积。