

微专题 14 函数的切线问题

一、基础知识：

（一）与切线相关的定义

1、切线的定义：在曲线的某点 A 附近取点 B ，并使 B 沿曲线不断接近 A 。这样直线 AB 的极限位置就是曲线在点 A 的切线。

（1）此为切线的确切定义，一方面在图像上可定性的理解为直线刚好与曲线相碰，另一方面也可理解为一个动态的过程，让切点 A 附近的点向 A 不断接近，当与 A 距离非常小时，观察直线 AB 是否稳定在一个位置上

（2）判断一条直线是否为曲线的切线，不再能用公共点的个数来判定。例如函数 $y = x^3$ 在 $(-1, -1)$ 处的切线，与曲线有两个公共点。

（3）在定义中，点 B 不断接近 A 包含两个方向， A 点右边的点向左接近，左边的点向右接近，只有无论从哪个方向接近，直线 AB 的极限位置唯一时，这个极限位置才能够成为在点 A 处的切线。对于一个函数，并不能保证在每一个点处均有切线。例如 $y = |x|$ 在 $(0, 0)$ 处，通过观察图像可知，当 $x = 0$ 左边的点向其无限接近时，割线的极限位置为 $y = -x$ ，而当 $x = 0$ 右边的点向其无限接近时，割线的极限位置为 $y = x$ ，两个不同的方向极限位置不相同，故 $y = |x|$ 在 $(0, 0)$ 处不含切线

（4）由于点 B 沿函数曲线不断向 A 接近，所以若 $f(x)$ 在 A 处有切线，那么必须在 A 点及其附近有定义（包括左边与右边）

2、切线与导数：设函数 $y = f(x)$ 上点 $A(x_0, f(x_0))$ ， $f(x)$ 在 A 附近有定义且附近的点 $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ ，则割线 AB 斜率为：

$$k_{AB} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

当 B 无限接近 A 时，即 Δx 接近于零， $\therefore$ 直线 AB 到达极限位置时的斜率表示为：

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

即切线斜率，由导数定义可知： $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ 。故 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$

在 $A(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。这是导数的几何意义。

3、从导数的几何意义中可通过数形结合解释几类不含导数的点：

（1）函数的边界点：此类点左侧（或右侧）的点不在定义域中，从而某一侧不含割线，也就无从谈起极限位置。故切线不存在，导数不存在；与此类似还有分段函数如果不连续，则断开处的边界值也不存在导数

（2）已知点与左右附近点的割线极限位置不相同，则不存在切线，故不存在导数。例如前面例子 $y = |x|$ 在 $(0,0)$ 处不存在导数。此类情况多出现在单调区间变化的分界处，判断时只需选点向已知点左右靠近，观察极限位置是否相同即可

（3）若在已知点处存在切线，但切线垂直 x 轴，则其斜率不存在，在该点处导数也不存在。

例如： $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处不可导

综上所述：（1）-（3）所谈的点均不存在导数，而（1）（2）所谈的点不存在切线，（3）中的点存在切线，但没有导数。由此可见：某点有导数则必有切线，有切线则未必有导数。

（二）方法与技巧：

1、求切线方程的方法：一点一方向可确定一条直线，在求切线时可考虑先求出切线的斜率（切点导数）与切点，在利用点斜式写出直线方程

2、若函数的导函数可求，则求切线方程的核心要素为切点 A 的横坐标 x_0 ，因为 x_0 可“一点两代”，代入到原函数，即可得到切点的纵坐标 $f(x_0)$ ，代入到导函数中可得到切线的斜率 $f'(x_0) = k$ ，从而一点一斜率，切线即可求。所以在解切线问题时一定要盯住切点横坐标，千方百计的把它求解出来。

3、求切线的问题主要分为两大类，一类是切点已知，那么只需将切点横坐标代入到原函数与导函数中求出切点与斜率即可，另一类是切点未知，那么先要设出切点坐标 (x_0, y_0) ，再考虑利用条件解出核心要素 x_0 ，进而转化成第一类问题

4、在解析几何中也学习了求切线的方法，即先设出切线方程，再与二次方程联立利用 $\Delta = 0$ 求出参数值进而解出切线方程。解析几何中的曲线与函数同在坐标系下，所以两个方法可以互通。若某函数的图像为圆锥曲线，二次曲线的一部分，则在求切线时可用解析的方法求解，