

2023 年江苏省南京大学强基计划数学试卷

- （3 分）平分圆 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ 的直线不经过第四象限，则斜率的范围是 _____.
- （3 分）已知 $x, y \in [0, 1]$ ，则 $x^2 + y^2 \leq 1$ 且 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ 的概率是 _____.
- （3 分）在 1, 2, 3, 4, 5 中，有放回地取数字三次，则最小的数字为 2 的概率是 _____.
- （3 分）已知 $\frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \beta} = 1$ ，则 $\frac{\sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha} =$ _____.
- （3 分）满足不定方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{30}$ 且 $x \leq y$ 的正整数解的组数是 _____.
- （3 分）已知实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 α 和 β ，且满足 α 是虚数， $\frac{\alpha^2}{\beta}$ 是实数，则 $\frac{\alpha}{\beta} =$ _____.
- （3 分）已知 $a > 0, b > 0, x + y = c$ ，则 $\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$ 的最小值为 _____.
- （3 分）已知 $f(n) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 2)$ ，则 $f(100) =$ _____.
- （3 分）已知 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c ，满足 $a^2 + b^2 + c^2 = \alpha$ ， $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \beta$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积
为 _____.
- （3 分）记 a_n 表示 n 在三进制下的各数字之和，例如 $a_7 = 3, a_9 = 1$ ，记 $S = \{a_n | a_n = 5, 1 \leq n \leq 2023\}$ ，
则 $|S| =$ _____.

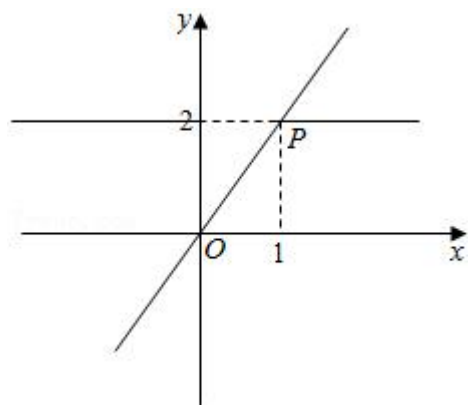
2023 年江苏省南京大学强基计划数学试卷

参考答案与试题解析

1. (3 分) 平分圆 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ 的直线不经过第四象限，则斜率的范围是 $[0, 2]$.

【分析】 由直线 l 平分圆 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ ，可得直线 l 过定点 $P(1, 2)$ ，画出图形，再由 l 不经过第四象限，数形结合可得直线 l 的斜率的取值范围.

【解答】 解：由 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ ，可得圆心为 $P(1, 2)$ ，
 $\therefore$ 直线 l 平分圆 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ ， $\therefore$ 直线 l 过定点 $P(1, 2)$ ，又直线 l 不经过第四象限，
 如图，



$k_{OP} = 2$,

$\therefore$ 直线 l 的斜率的取值范围为 $[0, 2]$.

故答案为： $[0, 2]$.

【点评】 本题考查直线和圆的位置关系，考查了直线的斜率，是基础题.

2. (3 分) 已知 $x, y \in [0, 1]$ ，则 $x^2 + y^2 \leq 1$ 且 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ 的概率是 $\frac{\pi - 2}{2}$.

【分析】 直接由几何概型即可求解.

【解答】 解析：如图，