2022-2023 学年第二学期九年级期中测试
数学试卷

满分为 150 分　考试时间 120 分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上，并认真核对条形码上的姓名、准考证号是否与本人的相符合．

2．答选择题必须用 2B 铅笔将答题卡上对应题目中的选项标号涂黑．如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答非选择题必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔作答，写在答题卡上各题目指定区域内相应的位置，在其他位置答题一律无效．

3．作图必须用 2B 铅笔作答，并请加黑加粗，描写清楚．

4．卷中除要求近似计算的结果取近似值外，其他均应给出精确结果．

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．-5 的相反数是（　　）

A. 5　　B. -5　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的定义即可求解．

【详解】解：-5的相反数是 5，

故选：A．

【点睛】此题主要考查相反数，解题的关键是熟知相反数的定义．

2．函数 $y=\sqrt{x-2}$ 中，自变量x 的取值范围是（　　）

A. $x<2$　　B. $x<2$　　C. $x>2$　　D. $x之2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解．

【详解】解：由题意得，$x-2\geq 0$，

解得$x\geq 2$．

故选：D．

【点睛】本题考查了函数自变量的取值范围，解决本题的关键是二次根式的被开方数是非负数．

3．下列运算正确的是（　　）

A. $3a+5b=7ab$　　B. $(2a)^3=8a^3$　　C. $a^3.a^5=a^{15}$　　D. $a^2+a^3=a^5$

【答案】B

【解析】

【分析】根据合并同类项，积的乘方，同底数幂相乘，逐项判断即可求解.

【详解】解：A 、$3a$ 和 $5b$ 不是同类项，无法合并，故本选项错误，不符合题意；

B 、$(2a)^3 = 8a^3$ ，故本选项正确，符合题意；

C 、$a^3 . a^5 = a^8$ ，故本选项错误，不符合题意；

D 、a^2 和 a^3 不是同类项，无法合并，故本选项错误，不符合题意；

故选：B

【点睛】本题主要考查了合并同类项，积的乘方，同底数幂相乘，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

4. 当x取何值时，分式 $\dfrac{x-2}{2x-3}$ 有意义(　　)

A. $x = 2$　　B. x 子 2　　C. $x = \dfrac{3}{2}$　　D. x 子 $\dfrac{3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】分式有意义时分母不能为 0，由此可解.

【详解】解：分式 $\dfrac{x-2}{2x-3}$ 有意义时，$2x-3$ 子 0，

解得 x 子 $\dfrac{3}{2}$，

故选：D．

【点睛】本题考查分式有意义的条件，解题的关键是掌握分式的分母不能为 0．

5. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是(　　)

A. 等边三角形　　B. 平行四边形

C. 圆　　D. 五角星

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【详解】A 、等边三角形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B 、平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不合题意；

C 、圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项符合题意；

D 、五角星是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意；

故选：C．

【点睛】本题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称

轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

6. 某组数据 -5、3、-8、-2、9、0、3 的中位数和众数分别是(　　)

A. -2，3　　B. 0，3　　C. -2，9　　D. 0，9

【答案】B

【解析】

【分析】根据中位数和众数的定义，即可求解.

【详解】解：把该组数据从小到大排列为：-8、-5、-2、0、3、3、9，位于正中间的一个数为 0，

∴中位数为 0；

∵该组数据中 3 出现的次数最多，

∴众数为 3.

故选：B

【点睛】本题主要考查了中位数和众数，熟练掌握把一组数据从大到小（或从小到大）排列后位于正中间的一个数或两个数的平均数是中位数；一组数据中出现次数最多的数是众数是解题的关键.

7. 四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=BD$，点 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，则四边形 $EFGH$ 是(　　)

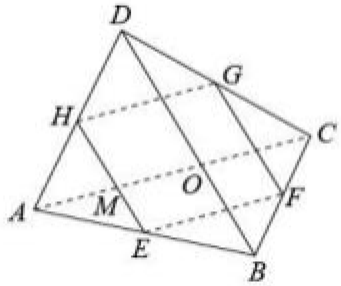
A. 正方形　　B. 矩形　　C. 平行四边形　　D. 菱形

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理可得 $EF=\frac{1}{2}AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$,，$EH=\frac{1}{2}BD$，$GF=\frac{1}{2}BD$，从而得到四边形 $EFGH$ 是菱形，即可求解.

【详解】解：如图，



∵点 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，

∴ $EF=\frac{1}{2}AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$,，$EH=\frac{1}{2}BD$，$GF=\frac{1}{2}BD$，

∵ $AC=BD$，

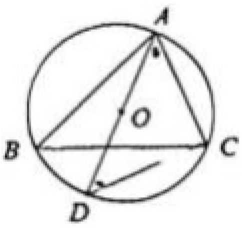
∴ $EF=FG=GH=EH$，

∴四边形 $EFGH$ 是菱形.

故选：D

【点睛】本题主要考查了三角形中位线定理，菱形的判定，熟练掌握三角形中位线定理，菱形的判定是解题的关键.

8. 如图，$\odot O$ 是 ΔABC 的外接圆，AD 是直径，$\angle ABC=\angle DAC$，则 $\angle DAC$ 的度数为(　　)



A. 30。　　B. 35。　　C. 40。　　D. 45。

【答案】D

【解析】

【分析】根据同弧所对圆周角相等及直径所对圆周角为直角，结合三角形内角和定理即可得到答案.

【详解】解：∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$，

∴ $\angle ABC=\angle ADC$，

∵ $\angle ABC=\angle DAC$，

∴ $\angle DAC=\angle ADC$，

∵ AD 是直径，

∴ $\angle ACD=90°$，

∴ $\angle DAC=\dfrac{180°-90°}{2}=45°$，

故选 D.

【点睛】本题考查同弧所对圆周角相等，直径所对圆周角为直角及三角形内角和是180。.

9. 已知线段 AB 的中点为M，动点P 满足 $AB=2PM$，则点 P 的轨迹是(　　)

A. 以 AB 为直径的圆　　B. AB 的延长线　　C. AB 的垂直平分线　　D. 平行AB 的直线

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆的有关概念即可分析判断.

【详解】解：∵线段 AB 的中点为M，

∴ $MA=MB=\frac{1}{2}AB$，

∵ $AB=2PM$，

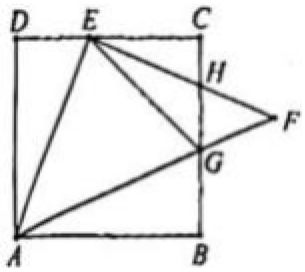
∴ $PM=MA=MB=\frac{1}{2}AB$，

∴点 P 在以点 M 为圆心，AB 为直径的圆上，

故选：A.

【点睛】本题考查了圆的有关认识，掌握圆的有关概念是解题的关键.

10. 如图，正方形 $ABCD$的边长为12，E 是边 CD 上一点，连接 AE，将 AE 绕着 E 点逆时针旋转 90。得到FE、EF 交 BC 于H，连接 AF 交 BC 于 G，连接EG，若$HG=5$，$EG=10$，则DE 的长为(　　)



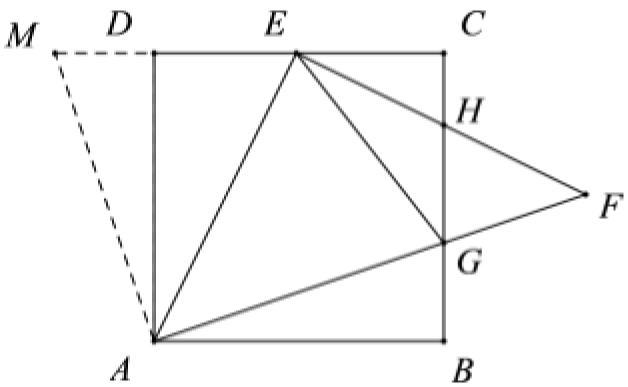
A. 4　　　　B. 5　　　　C. 6　　　　D. 4 或 6

【答案】C

【解析】

【分析】将‘ABG 绕 A 点逆时针旋转 90。，得到 $\triangle ADM$，得出 $AM=AG$，经DAM = 经BAG，证明‘EAM≌‘EAG(SAS)，得出 $ME=EG$，根据经DAE = 经CEH 得出 tan 经DAE = tan 经CEH，进而得出 $CH=-\dfrac{x(x-12)}{12}$，$EG=ME=MD+x=7+\dfrac{x(x-12)}{12}+x$，根据$EG=10$，建立方程，解方程即可求解.

【详解】解：如图所示，将‘ABG 绕 A 点逆时针旋转 90。，得到 $\triangle ADM$



∴ $AM=AG$，经DAM = 经BAG，

∵将 AE 绕着 E 点逆时针旋转 90。得到FE

∴ $EA=EF$,经AEF = 90。

∴ ΔAEF 是等腰直角三角形，

∴经EAG= 45。，

∵四边形 $ABCD$是正方形，

∴经DAB= 90。，

∴经DAE + 经GAB = 45。

∵经DAM = 经BAG

∴经DAE + 经DAM = 45。= 经EAG

在‘EAM,‘EAG 中，

$AM=AG$
经MAE = $\angle GAE$ = 45。
$AE=AE$

∴ ‘EAM≌‘EAG(SAS)

∴ $ME = EG$，

设$DE = x$，则$EC = 12—x$，

∵经DAE +经DEA = 90。,经CEH +经DEA = 90。

∴ 经DAE = 经CEH

∵ tan 经DAE = tan 经CEH

∴ $\frac{DE}{AD} = \frac{CH}{CE}$

即$\frac{x}{12} = \frac{CH}{12\quad x}$

解得： $CH = -\frac{x(x-12)}{12}$

∴ $MD = BG = BC - CG = 12 - 5 + \frac{x(x-12)}{12} = 7 + \frac{x(x-12)}{12}$

∴ $EG = ME = MD + x = 7 + \frac{x(x—12)}{12} + x$

∵ $EG = 10$

∴ $7 + \frac{x(x-12)}{12} + x = 10$

解得：$x_1 = 6, x_2 = -6$（舍去）

故选：C．

【点睛】本题考查了正方形的性质，正切的定义，全等三角形的性质与判定，旋转的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键．

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11．地球与月球的平均距离大约 384000km，用科学记数法表示这个距离为__km．

【答案】3.84×10^5

【解析】

【分析】根据科学记数法的概念可知：用科学记数法可将一个数表示 $a\times10^n$ 的形式．

【详解】$384000=3.84\times10^5$.

故答案是：3.84×10^5.

【点睛】考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为$a\times10^n$的形式，其中$1< a <10$ ，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

12．分解因式：$2x^2—2y^2$= ______．

【答案】$2(x+y)(x—y)$

【解析】

【分析】先提取公因式 2，再根据平方差公式进行二次分解即可求得答案.

【详解】$2x^2-2y^2=2(x^2-y^2)=2(x+y)(x-y)$.

故答案为 $2(x+y)(x-y)$.

【点睛】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用平方差公式进行二次分解，注意分解要彻底.

13. 二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=5\\x+2y=8\end{cases}$ 的解为________.

【答案】$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

【解析】

【分析】加减消元法求解即可.

【详解】解：$\begin{cases}x+y=5①\\x+2y=8②\end{cases}$，

②－①得，$y=3$，

将 $y=3$ 代入①得，$x=2$，

∴二元一次方程组的解为 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，

故答案为：$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$.

【点睛】本题考查了解二元一次方程组．解题的关键在于熟练掌握加减消元并正确的运算.

14. 请写出一个开口向上，顶点坐标为 $(2,1)$ 的二次函数________.

【答案】$y=(x-2)^2+1$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据二次函数的解析式的顶点式 $y=a(x-m)^2+n$，可知顶点坐标为 (m,n)；再由二次项系数 a 的符号可以判断抛物线的开口方向：当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，当 $a<0$ 时，开口向下，从而写出答案.

【详解】解：∵顶点坐标为 $(2,1)$，

∴设二次函数的解析式为：$y=a(x-2)^2+1$，

又∵二次函数的图像开口向上，

∴$a>0$，取 $a=1$，得 $y=(x-2)^2+1$，

故答案为：$y=(x-2)^2+1$.

【点睛】此题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次项系数的作用与二次函数的顶点式是解此题的关键.

15. “矩形的对角线相等”的逆命题是_____命题（填“真”或“假”）.

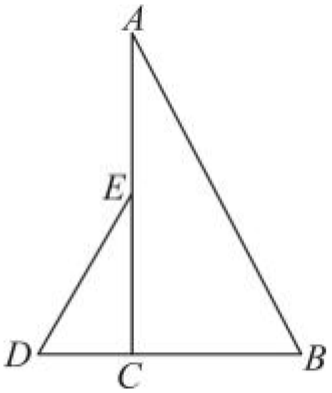
【答案】假

【解析】

【详解】试题分析：根据互逆命题的关系，可知其逆命题为“对角线相等的四边形为矩形”，而对角线互相平分且相等的四边形是矩形，可知是假命题．

故答案为假．

16. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=6$，E 是边 AC 的中点，延长 BC 到点 D，使 $BC=2CD$，那么 DE 的长是________．



【答案】3

【解析】

【分析】先判断出 $\triangle ACB\backsim\triangle ECD$，再利用相似三角形的性质即可得到 DE．

【详解】解：∵ $\angle ACB=90^\circ$，

∴ $\angle ACB=\angle ECD$，

∵ E 是边 AC 的中点，$BC=2CD$，

∴ $\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{CE}=2$，

∴ $\triangle ACB\backsim\triangle ECD$，

∴ $\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{DE}=2$

∵ $AB=6$

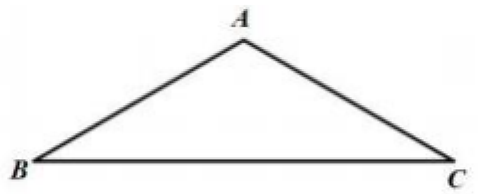
∴ $\frac{6}{DE}=2$

∴ $DE=3$．

故答案为：3．

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键．

17. 如图，用一段不可伸缩的铁丝围成一个 $\triangle ABC$，$AB=AC=2$，$\angle A=120^\circ$，若不改变 $\angle A$ 的度数，将三角形弯折成一个以点 A 为圆心的扇形，则折成的扇形半径长为________．

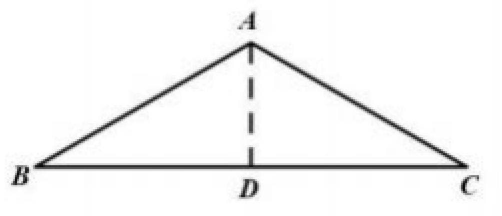


【答案】 $\frac{6+3\sqrt{3}}{3+\pi}$

【解析】

【分析】首先借助 $'ABC$ 求得铁丝的总长度，再设折成的扇形半径为 r ，根据将三角形弯折成扇形铁丝长度不变，求解即可.

【详解】解：如下图，过点 A 作 AD / BC 于点 D，



$\because AB = AC = 2$，经$A = 120_{。}$，

$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC$，经$BAD = \frac{1}{2}$经$BAC = 60_{。}$ ，

$\therefore$在 Rt△ABD 中，sin经$BAD = \frac{BD}{AB}$ ，

$\therefore BD = AB$. sin经$BAD = 2 \times \sin 60_{。} = \sqrt{3}$，

$\therefore BC = 2BD = 2\sqrt{3}$，

$\therefore$铁丝的总长为：$AB + AC + BC = 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$ ，

设折成的扇形半径为r，

根据题意可得，$2r + \frac{120_{。}}{360_{。}} \times 2\pi r = 4 + 2\sqrt{3}$，

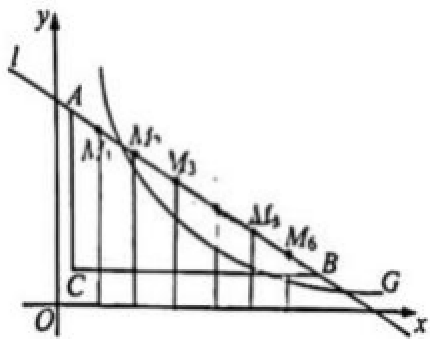
解得 $r = \frac{6+3\sqrt{3}}{3+\pi}$，

$\therefore$ 折成的扇形半径长为$\frac{6+3\sqrt{3}}{3+\pi}$.

故答案为：$\frac{6+3\sqrt{3}}{3+\pi}$.

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质、利用三角函数解直角三角形、扇形的周长等知识，理解题意并综合运用相关知识是解题关键.

18. 如图，直角三角形 ABC 的直角顶点 C 的坐标为$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$，两个锐角顶点 A 、$B$ 在直线l：$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$上，且直角边$AC$ Ⅱ y 轴，双曲线 G：$y = \frac{k}{x}$（k 为常数，$x > 0$），当双曲线 G 经过点B 时，点A _________（只填“在”或“不在”）双曲线 G 上；若点$M_1 \sim M_6$ 是线段 AB 上横坐标为整数的点（不与点 A 、B 重合），若双曲线 G 使这六个点分布在它的两侧，且两侧的点的个数比为$1:2$，则 k 的取值范围为________.



【答案】　①. 不在　②. $7<k<10$ 且 k子9

【解析】

【分析】先求出B 点坐标，然后将B 点左边代入双曲线解析式求出k 的值，再代入A 点坐标判断是否在双曲线上即可；

先求出$M_1\sim M_6$ 各点的坐标，双曲线两边分别有 2 个点和 4 个点，根据 k 值越大，双曲线开口越大，找到当双曲线过M_2 时k 取得最小值，当过M_4、M_5 时取得最大值，并排除双曲线过M_3 时的情形，然后联立求出 k 的取值范围.

【详解】解：因为A 在直线l上，有$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=\frac{17}{4}$，

则A 点坐标为$(\frac{1}{2}，\frac{17}{4})$

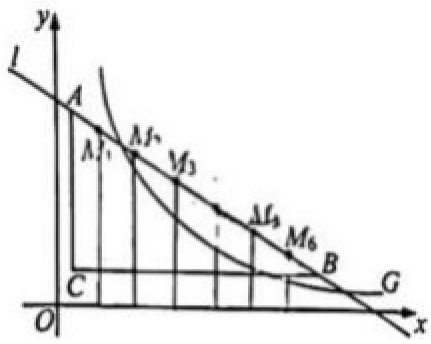
令$-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}=1$，解得$x=7$,

则$B(7,1)$，代入$y=\frac{k}{x}$ 得$k=7$

∴双曲线的解析式为$y=\frac{7}{x}$；

当$x=\frac{1}{2}$时，$y=14$子$\frac{17}{4}$

故A 不在双曲线 G 上.



根据一次函数解析式，可以求出这 6 个点分别是$(1,4)$、$(2，\frac{7}{2})$、$(3,,3)$、$(4、\frac{5}{2})$、$(5，2)$、$(6,\frac{3}{2})$

当双曲线与过点M_2 时，双曲线的一侧有M_1，另一侧有 4 个点，此时k 取得最小值；

当 $x=2$ 时，有$\frac{k}{2}=\frac{7}{2}$，即$k=7$；

当双曲线与M_4时，双曲线过点M_4、M_5，另一侧有 4 个点，此时，此时 k 取得最大值；

当$x=4$时，有$\frac{k}{4}=\frac{5}{2}$，即$k=10$；

但双曲线不能过M_3，此时有一个点在双曲线上不满足两侧的点的个数比为$1:2$的条件，即$\frac{k}{3}$子 3，k子 9；

综上，k 的取值范围为$7<k<10$且k子 9

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数的图像综合问题，充分利用数形结合思想，找出 AB 上的横坐标为整数的点，并结合图像分析是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分）

19. 计算：

（1）$(-2)^3+|-3|-\tan 45$。；

（2）$(a+2)^2-a(a-4)$.

【答案】（1）-6

（2）$8a+4$

【解析】

【分析】（1）分别先进行乘方运算、化简绝对值、代入特殊角的锐角三角函数值，再进行计算即可；

（2）运用完全平方公式等整式的乘法进行运算，合并同类项即可.

【小问 1 详解】

（1）解：原式 $=-8+3-1$

$=-6$

【小问 2 详解】

（2）解：原式$=a^2+4a+4-a^2+4a$

$=8a+4$

【点睛】本题考查运算求值和整式乘法运算，熟练掌握乘方运算、绝对值化简、特殊角的锐角三角函数值，以及整式乘法中完全平方公式的运算是解题的关键；易错点是去括号和运算过程中符号的变化.

20. （1）解方程：$\frac{3}{x\quad 1}=\frac{1}{2x+3}$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}3x-1>x+1 ① \\ x+3>4x-2 ②\end{cases}$.

【答案】（1）$x=-2$；（2）$1<x<\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】（1）先去分母，变分式方程为整式方程，然后再解整式方程，最后对方程的解进行检验即可；

（2）先求出两个不等式的解集，然后再求出不等式组的解集即可.

【详解】（1）解：$\frac{3}{x-1}=\frac{1}{2x+3}$

方程两边同乘$(x-1)(2x+3)$得：$6x+9=x-1$，

移项合并同类项得：$5x=-10$，

未知数系数化为1得：$x=-2$

检验：把$x=-2$代入$(x-1)(2x+3)$得$(-2-1)(-4+3)=3\neq 1$，

∴$x=-2$为原方程的根；

（2）解：$\begin{cases}3x-1>x+1① \\ x+3>4x-2②\end{cases}$，

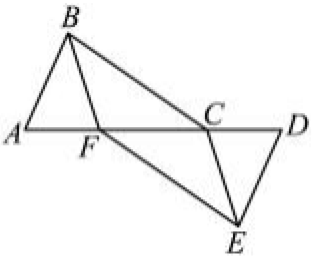
由①得：$x>1$，

由②得：$x<\frac{5}{3}$，

∴不等式组的解集为$1<x<\frac{5}{3}$．

【点睛】本题主要考查了解分式方程和不等式组，解题的关键是熟练掌握解分式方程和不等式组的一般步骤，准确计算，注意分式方程要进行检验．

21．如图，点A、F、C、D在同一条直线上，$AB=DE$，$AF=DC$，$BC=EF$．



（1）求证：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$；

（2）连接BF、CE，判断四边形$BFEC$的形状，并说明理由．

【答案】（1）证明见解析

（2）四边形$BFEC$是平行四边形，理由见解析

【解析】

【分析】（1）由$AF=DC$得$AC=DF$，再利用SSS即可证明三角形全等；

（2）由$\triangle ABC\cong\triangle DEF$可得$\angle ACB=\angle EFD$，进而可得$BC\parallel EF$，即可证明四边形$BFEC$是平行四边形．

【小问1详解】

证明：∵$AF=DC$，

∴$AF+FC=DC+FC$，即$AC=DF$

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中

$\begin{cases}AB=DE \\ BC=EF \\ AC=DF\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF(\text{SSS})$

【小问 2 详解】

四边形 $BFEC$ 是平行四边形，理由如下：

$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$，

$\therefore \angle ACB = \angle EFD$，

$\therefore BC \parallel EF$，

$\because BC = EF$，

$\therefore$ 四边形 $BFEC$ 是平行四边形.

【点睛】本题考查了三角形全等的判定和性质，平行四边形的判定，平行线的性质，熟练掌握三角形全等的判定，平行四边形的判定是解题的关键.

22. 一只不透明的袋子中装有 3 个白球，1 个红球，这些球除颜色外都相同.

（1）若从袋子里任意摸出一个球，则摸出红球的概率为________；

（2）搅匀后从中任意摸出 2 个球（先摸出 1 个球，且这个球不放回，再摸出 1 个球），求恰好摸出 1 个红球、1 个白球的概率.（请用画“树状图”或“列表”等方法写出分析过程）.

【答案】（1）$\frac{1}{4}$

（2）图见详解，$\frac{1}{2}$

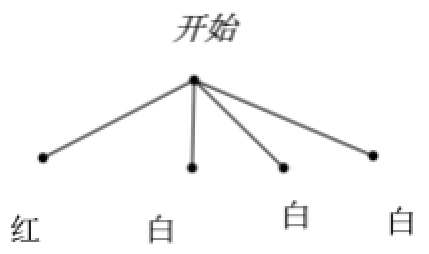
【解析】

【分析】（1）根据题意画出树状图找到所有情况及红球的情况，即可得到答案；

（2）根据题意画出树状图找到所有情况及所求的情况，即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：由题意可得，

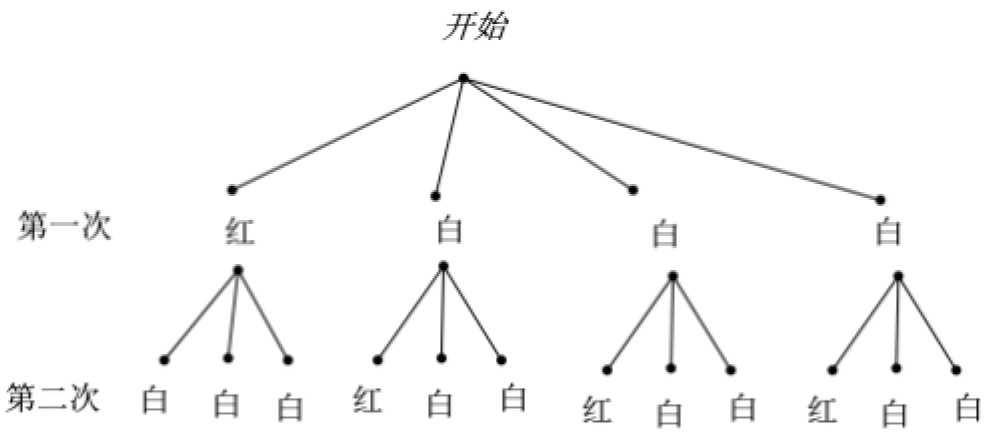


$P_{(红)} = \frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{4}$；

【小问 2 详解】

解：由题意可得，



总的有12种情况，摸出 1 个红球、1 个白球的情况有 6 种情况，

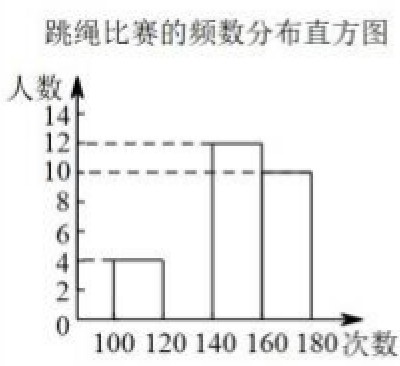
$\therefore P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，

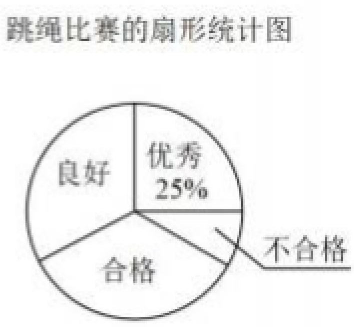
∴摸出 1 个红球、1 个白球的概率为$\frac{1}{2}$；

【点睛】本题考查树状图法求概率， 解题的关键是正确画出树状图.

23. 促进青少年健康成长是实施“健康中国”战略的重要内容．为了引导学生积极参与体育活动，某校举办了一分钟跳绳比赛，随机抽取了 40 名学生一分钟跳绳的次数进行调查统计，并根据调查统计结果绘制了如下表格和统计图：

等级	次数	频率
不合格	$100<x<120$	a
合格	$120\leqslant x<140$	b
良好	$140\leqslant x<160$	
优秀	$160\leqslant x<180$	





请结合上述信息完成下列问题：

（1）$a=$________，$b=$________；

（2）请补全频数分布直方图；

（3）在扇形统计图中，“良好”等级对应的圆心角的度数是________；

（4）若该校有 1200 名学生，请估计该学生一分钟跳绳次数达到合格及以上的人数.

【答案】（1）0.1，0.35

（2）见解析　　（3）$108°$

（4）1080 人

【解析】

【分析】（1）根据频数分布直方图中不合格的数除总数即可求得 a 值；同理得出良好的人数，再根据扇形统计图求出优秀的人数即可得出合格的人数，再除总数即可求得 b 的值.

（2）由（1）可得；

（3）由（1）得出良好的人数除总人数，再乘 $360°$ 即可.

（4）先求出 40 个人合格及以上的人数占总人数的频率再乘 1200 即可解答.

【小问 1 详解】

解：根据频数分布直方图可知：$a=4\div 40=0.1$，

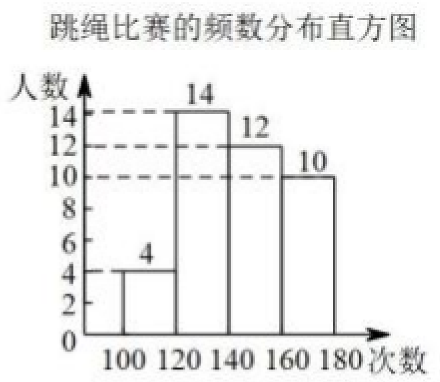
因为 $40\times 25\%=10$，

所以 $b=(40-4-12-10)\div 40=14\div 40=0.35$，

故答案为：0.1；0.35；

【小问 2 详解】

解：如图，即为补全的频数分布直方图；



【小问 3 详解】

解：在扇形统计图中，“良好”等级对应的圆心角的度数是 $360°\times\dfrac{12}{40}=108°$；

故答案为：$108°$；

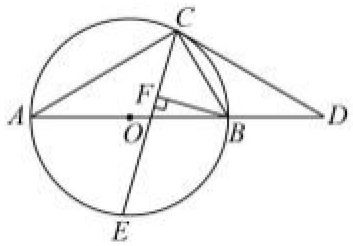
【小问 4 详解】

$1200\times\dfrac{40-4}{40}=1080$（人），

∴估计该校学生一分钟跳绳次数达到合格及以上的人数是 1080 人.

【点睛】此题主要考查读频数分布直方图的能力和利用扇形统计图获取信息的能力．解题的关键是根据直方图得到进一步解题的有关信息.

24. 如图，在 $\triangle ADC$ 中，$AC=CD$，$\angle D=30°$，点 B 是 AD 上一点，$\angle ACB$ 的角平分线 CE 交以 AB 为直径的 $\odot O$ 于点 E，过点 B 作 $BF\perp EC$，垂足为 F，$\odot O$ 恰好过点 C.



（1）求证： CD 是⊙O 切线；

（2）若 $AC = 6\sqrt{3}$ ，求 CF 的长.

【答案】（1）证明见解析

（2） $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）如图所示，连接 OC ，先根据等边对等角得到 $\angle A = 30^\circ$ ，由圆周角定理得到 $\angle BOC = 60^\circ$ ，再利用三角形内角和定理求出 $\angle OCD = 90^\circ$ 即可证明结论；

（2） 由 AB 是直径，得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，再由含 30 度角的直角三角形的性质得到 $BC = 6$ ， 由角平分线的定义得到 $\angle BCE = 45^\circ$ ，即可证明 $\triangle BCF$ 是等腰直角三角形，则 $CF = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = 3\sqrt{2}$.

【小问 1 详解】

证明：如图所示，连接 OC ，

$\because AC = CD, \angle D = 30^\circ$ ，

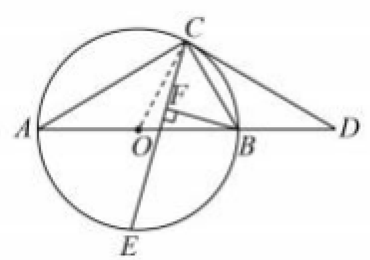
$\therefore \angle A = \angle D = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle OCD = 180^\circ \quad \angle COD \quad \angle D = 90^\circ$ ，

又$\because$点 C 在⊙O 上，

$\therefore$ CD 是⊙O 切线；



【小问 2 详解】

解： $\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because \angle BAC = 30^\circ$ ， $AC = 6\sqrt{3}$ ，

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{3}AC = 6$ ，

$\because CE$ 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle BCE = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$，

$\because BF \perp CE$，即 $\angle BFC = 90^\circ$，

$\therefore \angle CBF = 45^\circ = \angle BCF$，

$\therefore CF = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = 3\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了切线的判定，圆周角定理，等腰三角形的性质与判定，勾股定理，含 30 度角的直角三角形的性质，正确作出辅助线是解题的关键.

25. 某旅游公司在景区内配置了 50 辆观光车供游客租赁使用，假定每辆观光车一天内最多能出租一次，且每辆车的日租金 x（元）是 5 的倍数，发现每天的营运规律如下：当 x 不超过 100 元时，观光车能全部租出；当 x 超过 100 元时，每辆车的日租金每增加 5 元，租出去的观光车就会减少 1 辆，已知所有观光车每天的管理费是 1100 元.（注：净收入=租车收入-管理费）

（1）当日租金 x 为 135 元时，观光车能租出________辆；

（2）设每日净收入为 y 元，写出 y 与 x 的函数关系式；

（3）当每辆车的日租金为多少元时，每天的净收入最多？

【答案】（1）43 辆　（2）$y=\begin{cases}50x-1100\ (0<x\le 100)\\ -\frac{1}{5}x^2+70x-1100\ (x>100)\end{cases}$

（3）175 元

【解析】

【分析】（1）根据题意和当日租金可以确定当日租出的观光车；

（2）根据题意可以得到 w 与 x 的函数关系式；

（3）由（2）知，函数解析式是分段函数，在每一段内求出函数最大值，比较得出函数的最大值.

【小问 1 详解】

由题意得：$x = 135 > 100$，

$\because$ 每辆车的日租金每增加 5 元，租出去的观光车就会减少 1 辆，

$\therefore \frac{135-100}{5} = 7$，

$\therefore 50-7 = 43$（辆），

$\therefore$ 观光车能租出 43 辆，

故答案为：43；

【小问 2 详解】

因为每辆车的净收入为 y 元，所以当 $0 < x < 100$ 时，$y_1 = 50x - 1100$；

当 $x > 100$ 时，$y_2 = x\left(50-\frac{x-100}{5}\right) - 1100 = -\frac{1}{5}x^2 + 70x - 1100$，

即y与x的函数关系式：$y=\begin{cases}50x-1100(0<x<100)\\-\frac{1}{5}x^2+70x-1100(x>100)\end{cases}$；

【小问 3 详解】

由（2）可知，当$0<x<100$时，$y_1=50x-1100$，

因为y_1随x的增大而增大，

所以当$x=100$时，y_1的最大值为$50\times100-1100=3900$；

当$x>100$时，$y_2=-\frac{1}{5}(x-175)^2+5025$，因为$-\frac{1}{5}<0$，

所以当$x=175$时，y_2的最大值为5025，

因为$5025>3900$．

所以当每辆车的日租金为 175 元时，每天的净收入最多是 5025 元．

【点睛】本题考查了一次函数的应用，以及二次函数的应用，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件．

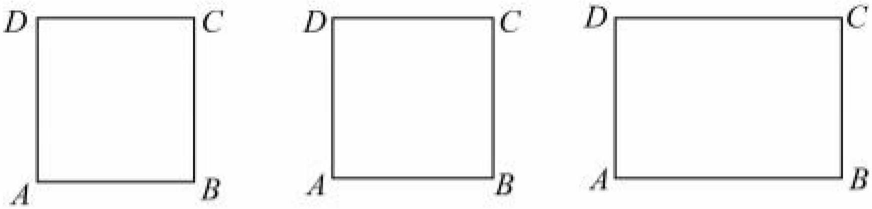
26．问题探究：

（1）请仅用无刻度直尺在图①的正方形$ABCD$内，画出使$\angle APB=90^\circ$的一个点P；

（2）请用无刻度直尺和圆规在图②的正方形$ABCD$边上，画出使$\angle APB=60^\circ$的所有点P．

问题解决：

（3）如图③所示，现有一块矩形钢板$ABCD$，$AB=4$，$BC=3$，工人师傅想用它裁出两块全等的、面积最大的$\triangle APB$和$\triangle CP_1D$钢板，且$\angle APB=\angle CP_1D=60^\circ$，此时裁得的$AP$长为________．



图①　　图②　　图③

【答案】（1）见解析；（2）见解析；　（3）$\frac{16+4\sqrt{3}}{5}$或$\frac{8\sqrt{3}}{5}$．

【解析】

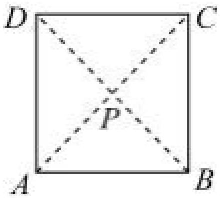
【分析】（1）根据正方形对角线互相垂直，连接AC、BD交于点P，即为所求；

（2）以AB的长为半径画弧，在正方形内交于点E，连接AE、BE，得到等边$\triangle ABE$，作边AB、BE的垂直平分线交于点O，得到$\triangle ABE$的外心，然后作$\triangle ABE$的外接圆O，根据同弧所对的圆周角相等，外接圆O与AD、BC的交点P_1、P_2即为所求；

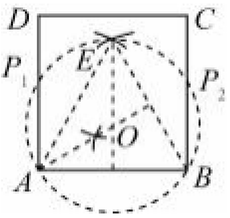
（3）根据（2）的做法，作出等边$\triangle ABE$的外接圆O，分两种情况讨论：①连接AC，外接圆O与AC相交于点P，连接BP，在AC上取一点P_1，使得$AP_1=CP$，过点B作$BG\perp AC$交AC与点G，利用三角形的面积求出$BG=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{12}{5}$，再利用勾股定理求出$AG=\frac{16}{5}$，然后根据特殊的三角函数值求出$PG=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，即可得到$AP$

的长；②连接 BD，外接圆 O与 BD相交于点 P，连接 AP，在BD上取一点 P_1，使得 $BP_1=DP$，过点 A 作 $AG\perp BD$ 交 BD与点 G，直接利用特殊的三角函数值即可求出 AP 的长.

【详解】解：(1) 点 P 即为所求；

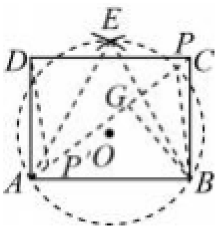


（2）点P_1、P_2 即为所求；



（3）如图，根据（2）的作法，等边 ΔABE 的外接圆 O，

①连接 AC，外接圆 O与 AC 相交于点 P，连接 BP，在 AC 上取一点P_1，使得 $AP_1=CP$，过点 B 作 $BG\perp AC$ 交 AC 与点 G，



：$AP=CP_1$，

：等边 ΔABE，

：经$AEB=60^\circ$，

：经$APB=60^\circ$，

：矩形 $ABCD$，$AB=4$，$BC=3$，

：$AB\,//\,CD$，$AB=CD$，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，

：经$PAB=$经P_1CD，

在 $\triangle APB$ 和ΔCP_1D 中，

$$\begin{cases} AB=CD \\ 经PAB=经P_1CD \\ AP=CP_1 \end{cases},$$

:$\Delta APB\cong\Delta CP_1D$ (SAS)，

：经$APB=$经$CP_1D=60^\circ$，

：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{2}AC.BG$，

： $BG=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}=\dfrac{12}{5}$，

在 RtΔAGB 中，$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{16}{5}$，

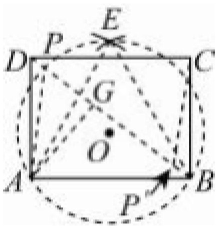
： $\tan$经$BPG=\tan 60$O $=\sqrt{3}$，

： $\dfrac{BG}{PG}=\dfrac{\frac{12}{5}}{PG}=\sqrt{3}$，

： $PG=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，

： $AP=AG+PG=\dfrac{16}{5}+\dfrac{4\sqrt{3}}{5}=\dfrac{16+4\sqrt{3}}{5}$；

②连接 BD，外接圆 O与 BD相交于点 P，连接 AP，在BD上取一点 P_1，使得$BP_1=DP$，过点 A 作 AG⊥ BD 交 BD与点 G，



同理可证，$\Delta APB\cong\Delta CP_1D$(SAS)，经$APB$ = 经CP_1D = 60O，$AG=\dfrac{12}{5}$

： $\sin$经$APG=\sin 60$O $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

： $\dfrac{AG}{AP}=\dfrac{\frac{12}{5}}{AP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

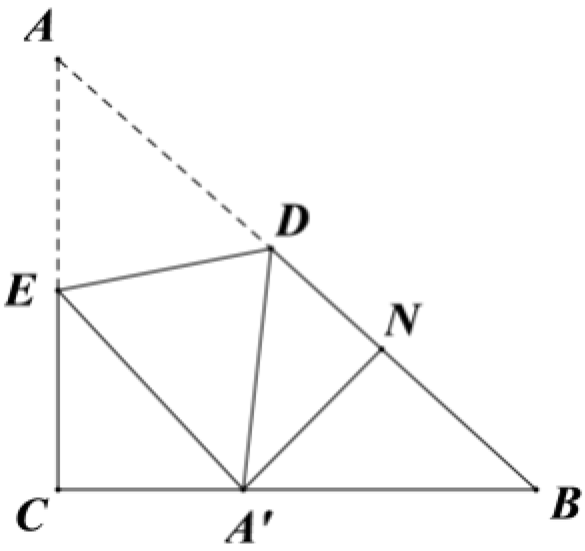
： $AP=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$，

综上可知，AP 的长为$\dfrac{16+4\sqrt{3}}{5}$或$\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$，

故答案为：$\dfrac{16+4\sqrt{3}}{5}$或$\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$．

【点睛】本题考查了复杂作图，三角形的外接圆，勾股定理，特殊的三角函数值，正方形的性质，矩形的性质，全等三角形的判定等知识，熟练掌握基本作图方法，灵活运用相关性质解决问题是解题关键．

27. 如图，ΔABC 中，经$C=90$O，$AC=BC$，将 ΔABC翻折，使得点A 落在边 BC 上的点 A_1 处，折痕分别交边 AB 、AC 于点D 、点 E．



（1）当 $AC=BC=8$，且点 A' 是 BC 的中点时.

① AA' 长为________；

②求 $\frac{AD}{AE}$ 的值；

（2）如果 $\frac{AC}{AB}=x$，$\frac{AD}{AE}=y$，求y 关于x 的函数关系式.

【答案】（1）① $4\sqrt{5}$；② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

（2） $y=-\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2x+1}$

【解析】

【分析】（1）①根据勾股定理即可解答；②根据锐角三角函数得到 AE、AM，再根据相似三角形的判定得到 $\triangle AEM\backsim\triangle AA'C$，$\triangle ADM\backsim\triangle AA'N$，最后根据相似三角形的性质即可解答；

（2）由（1）可得 $\frac{AD}{AM}=\frac{AA'}{AN}$，$\frac{AE}{AM}=\frac{AA'}{AC}$ 即可解答.

【小问 1 详解】

解：①∵ $AC=BC=8$，$\angle C=90°$，点A' 是BC 的中点，

$\therefore CA'=\frac{1}{2}BC=4$，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AA'=\sqrt{AC^2+CA'^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，

故答案为：$4\sqrt{5}$；

②连接 AA' 交DE 于点M，过点 A' 作$A'N\perp AB$ 于点 N，

∵ $\angle C=90°$，$AC=BC$，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=8\sqrt{2}$，

$\because AA/ = 4\sqrt{5}$，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AA/ = 2\sqrt{5}$，

$\because$ 经ABC=45O，AN」BD，$AC = BC = 8$，点 $A/$ 是 BC 的中点，

$\therefore A/B = \frac{1}{2}BC = 4$，

$\therefore A/N = BN = \sin$ 经$ABC \cdot A/B = 2\sqrt{2}$，

$\therefore AN = AB - BN = 6\sqrt{2}$，

$\because$ 经EAM = 经A/AC，经AME = 经C，

$\therefore \triangle AEM$ - $\triangle AA/C$，

$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AA/}{AC}$，

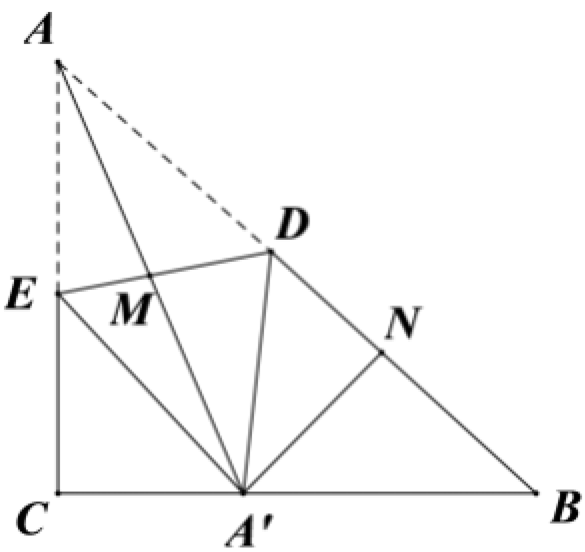
$\therefore AE = 5$，

同理可证：$\triangle ADM$ - $\triangle AA/N$，

$\therefore \frac{AD}{AM} = \frac{AA/}{AN}$，

$\therefore AD = \frac{10\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$．



【小问 2 详解】

解：由（1）可知 $\frac{AD}{AM} = \frac{AA/}{AN}$，$\frac{AE}{AM} = \frac{AA/}{AC}$，

$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AN}$，

即$y=\dfrac{AC}{AN}$，

设$A_1N=BN=a$，

∵$\angle A_1BC=45^\circ$，

∴$A_1B=\sin 45^\circ\cdot 2a=\sqrt{2}a$，

∴$A_1C=A_1Bx=\sqrt{2}ax$，

∴$AC=BC=\sqrt{2}a+\sqrt{2}ax=\sqrt{2}a(x+1)$，$AN=2ax+2a-a=a(2x+1)$，

∴$y=\dfrac{\sqrt{2}(x+1)}{2x+1}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，折叠的性质，锐角三角形函数，勾股定理，掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

28. 已知抛物线$y=ax^2-2ax+c$过点$A(-1,0)$和$C(0,3)$，与x轴交于另一点B，顶点为D.

（1）求抛物线的解析式，并写出D点的坐标；

（2）如图1，E为线段BC上方的抛物线上一点，$EF\perp BC$，垂足为F，$EM\perp x$轴，垂足为M，交BC于点G．当$BG=CF$时，求ΔEFG的面积；

（3）如图2，AC与BD的延长线交于点H，在x轴上方的抛物线上是否存在点P，使$\angle OPB=\angle AHB$？若存在，求出点P的坐标：若不存在，请说明理由.

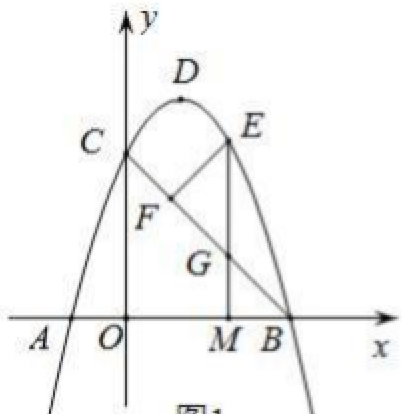


图1

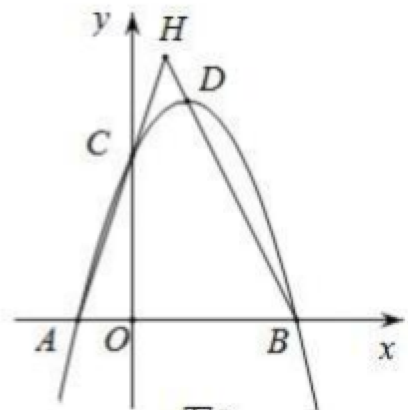


图2

【答案】（1）$y=-x^2+2x+3$，$D(1,4)$；（2）$S_{\Delta EFG}=1$；（3）存在，$P_1(0,3)$, $P_2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$, $P_3\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法求出a的值即可得到解析式，进而得到顶点D坐标；

（2）先求出BC的解析式$y=-x+3$，再设直线EF的解析式为$y=x+b$,设点E的坐标为$(m,-m^2+2m+3)$，联立方程求出点F，G的坐标，根据$BG^2=CF^2$列出关于m的方程并求解，然后求得G的坐标，再利用三角形面积公式求解即可；

（3）过点A作AN⊥HB，先求得直线BD，AN的解析式，得到H，N的坐标，进而得到$\angle H=45^\circ$，设点

$p\left(n,-n^2+2n+3\right)$，过点 P 作 PRx 轴于点 R，在 x 轴上作点 S 使得 RS=PR，证明$\Delta OPS\backsim\Delta OPB$，根据相似三角形对应边成比例得到关于 n 的方程，求得后即可得到点 P 的坐标.

【详解】（1）把点 A（-1，0），C（0，3）代入$y=ax^2-2ax+c$ 中，

$\begin{cases}a+2a+c=0\\c=3\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=-1\\c=3\end{cases}$，

$\therefore y=-x^2+2x+3$，

当 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$时，y=4，

$\therefore D(1,4)$

（2）$\because$ $y=-x^2+2x+3$

令 $y=0$，$\therefore x=-1$，或 x=3

$\therefore B(3,0)$

设 BC 的解析式为$y=kx+b\quad(k\neq 0)$

将点$C(0,3),B(3,0)$ 代入，得

$\begin{cases}b=3\\3k+b=0\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-1\\b=3\end{cases}$，

$\therefore y=-x+3$

$\because EF\perp CB$

设直线 EF 的解析式为$y=x+b$，设点 E 的坐标为$\left(m,-m^2+2m+3\right)$，

将点 E 坐标代入$y=x+b$ 中，得$b=-m^2+m+3$，

$\therefore y=x-m^2+m+3$

$\begin{cases}y=-x+3\\y=x-m^2+m+3\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=\dfrac{m^2-m}{2}\\y=\dfrac{-m^2+m+6}{2}\end{cases}$

$\therefore F\left(\dfrac{m^2-m}{2},\dfrac{-m^2+m+6}{2}\right)$

把 x=m 代入$y=-x+3$

$\therefore G(m, -m+3)$

$\because BG = CF$

$\therefore BG^2 = CF^2$

即 $(m-3)^2 + (3-m)^2 = \left(\dfrac{m^2-m}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m^2-m}{2}\right)^2$

解得 m=2 或 m=-3

∵点 E 是 BC 上方抛物线上的点

∴m=-3 舍去

∴点 $E(2,3), F(1,2)$，$G(2,1)$

$EF = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$FG = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore S_{\triangle EFG} = \dfrac{1}{2}\text{根}\sqrt{2}\text{根}\sqrt{2} = 1$

（3）过点 A 作 AN⊥HB，

∵点$D(1,4), B(3,0)$

$\therefore y_{DB} = -2x+6$

∵点$A(-1,0)$，点$C(0,3)$

$\therefore y_{AC} = 3x+3$

$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = -2x+6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{24}{5} \end{cases}$$

$\therefore H\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{24}{5}\right)$

设 $y_{AN} = \dfrac{1}{2}x + b$，把（-1，0）代入，得 b=$\dfrac{1}{2}$

$\therefore y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ y = -2x+6 \end{cases}$$

: $\begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases}$

:$N\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

:$AN^2 = \left(\dfrac{11}{5} + 1\right)^2 + \left(\dfrac{8}{5}\right)^2$

$= \left(\dfrac{16}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{5}\right)^2$

$HN^2 = \left(\dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{16}{5}\right)^2$

:$AN = HN$

:经$H = 45^\circ$

设点$p\left(n, -n^2 + 2n + 3\right)$

过点 P 作 PR⊥x 轴于点 R，在 x 轴上作点 S 使得 RS=PR

:经$RSP = 45^\circ$ 且点 S 的坐标为$\left(-n^2 + 3n + 3, 0\right)$

若经OPB = 经$AHB = 45^\circ$

在 ‘OPS 和 ΔOPB 中，

$\begin{cases} \text{经}POS = \text{经}POB \\ \text{经}OSP = OPB \end{cases}$

:‘OPS∽‘OPB

: $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{OS}{OP}$

:$OP^2 = OB \cdot OS$

:$n^2 + (n + 1)^2(n - 3)^2 = 3 \cdot (-n^2 + 2n + 3)$

:$n = 0$ 或 $n = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

:$P_1(0, 3)$

$P_2\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$

$P_3\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$

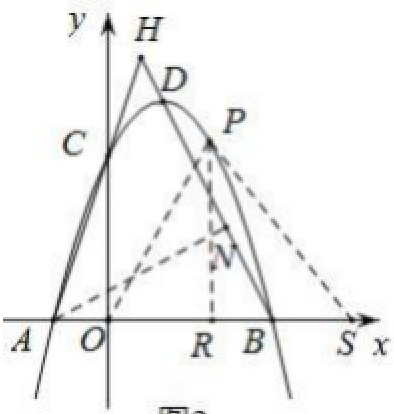


图2

【点睛】本题考查的是二次函数的综合，涉及到的知识点较多，运算较复杂，第 3 问的解题关键在于添加适当的辅助线，利用数形结合的思想列出方程求解.