2023年江苏省无锡外国语学校中考数学一模试卷

一、选择题（共30分）

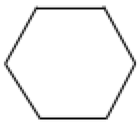
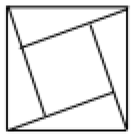
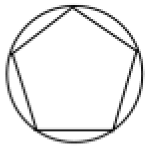
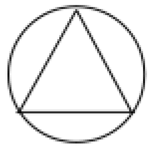
1.（3分）$-\frac{2}{3}$的相反数是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{2}{3}$

2.（3分）函数$y=\sqrt{2x+1}$中的自变量x的取值范围是（　　）

A．$x\neq-\frac{1}{2}$　　B．$x>-\frac{1}{2}$　　C．$x\geqslant-\frac{1}{2}$　　D．$x\leqslant-\frac{1}{2}$

3.（3分）下列图形既是轴对称图形，也是中心对称图形的是（　　）

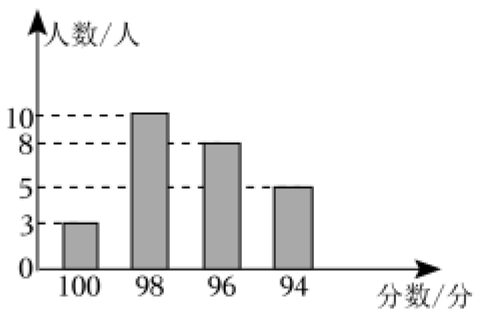
A．　　B．　　C．　　D．

4.（3分）下列运算结果正确的是（　　）

A．$2a+3b=5ab$　　B．$(-2a^3)^2=4a^6$

C．$x^8\div x^4=x^2$　　D．$(a+2)\cdot(2-a)=a^2-4$

5.（3分）为了增强学生预防新冠肺炎的安全意识，某校开展疫情防控知识竞赛，来自不同年级的26名参赛同学的得分情况如图所示，这些成绩的众数和中位数分别是（　　）

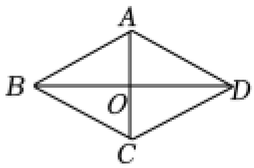


A．98，98　　B．98，97　　C．96，98　　D．96，96

6.（3分）已知有理数x，y满足方程组$\begin{cases}3x-y=3\\2y-x=-4\end{cases}$，则$2x+y$的值为（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

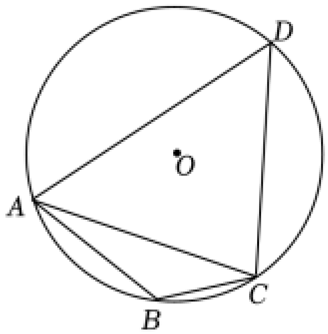
7.（3分）如图，▱$ABCD$的对角线AC与BD相交于点O，添加下列条件不能证明▱$ABCD$是菱形的是（　　）



A. $\angle ABD=\angle ADB$　　B. $AC\perp BD$　　C. $AB=BC$

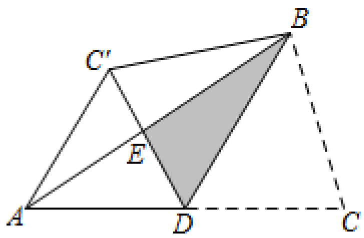
D. $AC=BD$

8.（3分）如图，四边形$ABCD$内接于⊙O，$\angle ABC=135°$，$AC=1$，则⊙O的半径为（　　）



A. 4　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9.（3分）如图，在△ABC中，D是AC边上的中点，连接BD，把△BDC沿BD翻折，得到△BDC'，DC与AB交于点E，连接AC'，若$AD=AC'=2$，$BD=3$，则点D到BC的距离为（　　）



A. $\frac{2}{7}\sqrt{21}$　　B. $\frac{7}{5}\sqrt{23}$　　C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2}{7}\sqrt{23}$

10.（3分）定义在平面直角坐标系xOy中，若某函数的图象上存在点P（x，y），满足$y=mx+m$，m为正整数，则称点P为该函数的"m倍点"，例如：$m=2$时，点（﹣2，﹣2）即为函数）$=3x+4$的"2倍点".

①点（﹣3，﹣2）是函数$y=\frac{6}{x}$的"1倍点"；

②若函数$y=-x^2+bx$存在唯一的"3倍点"，则b的值为$3+2\sqrt{3}$；

③若函数$y=-x+2m+1$的"m倍点"在以点（﹣1，5）为圆心，$2m$为半径的圆内，则m为大于1的所有整数.

上述说法正确的有（　　）

A. ①　　B. ①②　　C. ①③　　D. ①②③

二、填空题（共 24 分）

11.（3 分）风能是一种清洁能源，我国风能储量很大，仅陆地上风能储量就有 253000 兆瓦，用科学记数法表示为 ________兆瓦.

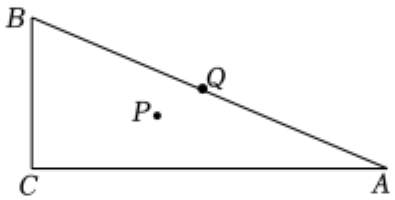
12.（3 分）因式分解：$2x^2-2=$________.

13.（3 分）圆锥底面圆的半径为 $3m$，母线长为 $6m$，则圆锥的侧面积为________.

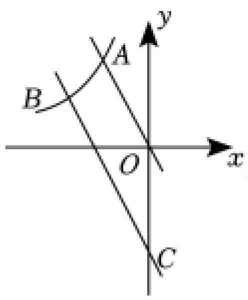
14.（3 分）命题“如果 $a>b$，则$|a|>|b|$”是 ________命题（填“真”或“假”）.

15.（3 分）计算$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{1-x}$的结果是________.

16.（3 分）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=15$，$BC=8$，则此 Rt△ABC 的重心 P 与外心 Q 之间的距离为 ________.



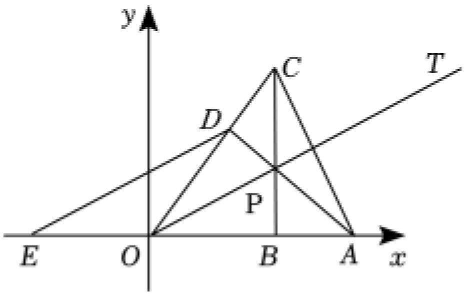
17.（3 分）如图，正比例函数 $y=-2x$ 与反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$（$x<0$）的图象有一个交点 A，直线 $BC\parallel OA$，交反比例函数的图象于点 B，交 y 轴于点 C，若 $BC=2OA$，则直线 BC 的解析式为 ________.



18.（3 分）如图，在平面直角坐标系中，已知 A（4，0），射线 OT 满足 $\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$，点 P 为射线 OT 上的一个动点，过 P 作 $PB\perp x$ 轴于 B，过 A 作 $AC\perp$射线 OT 交 BP 延长线于点 C，连接 AP 并延长交 OC 于点 D．过 D 作 $DE\parallel$射线 OT 交 x 轴于点 E.

（1）若 $OB=2$，则 C 坐标为 ________；

（2）AE 的最大值为 ________.



三、解答题（共96分）

19.（8分）计算与化简：

（1）$(-2)^{-1}+2\cos30^\circ-\sqrt{9}$.

（2）$(a+1)(a-2)-(a-3)^2$.

20.（8分）解方程与不等式组：

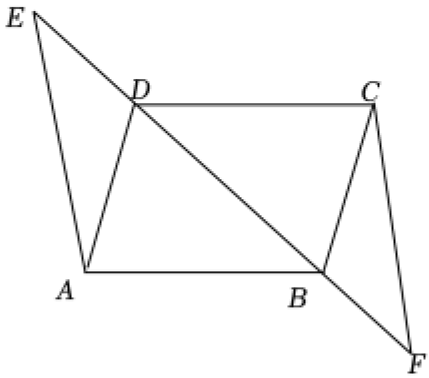
（1）$2x^2-2x-1=0$；

（2）$\begin{cases}3x-(x-2)>6\\ \dfrac{2x+1}{3}\leqslant x\end{cases}$.

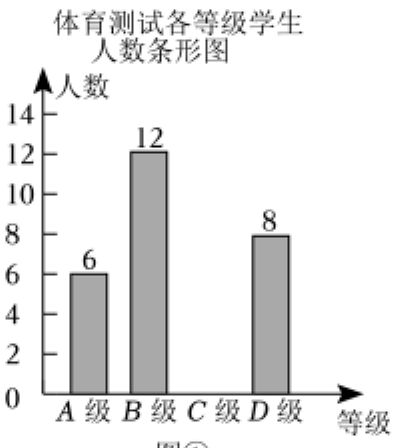
21.（10分）已知：如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，点 E，D，B，F 在同一条直线上，$\angle E=\angle F$.

（1）求证：$\triangle ADE\cong\triangle CBF$；

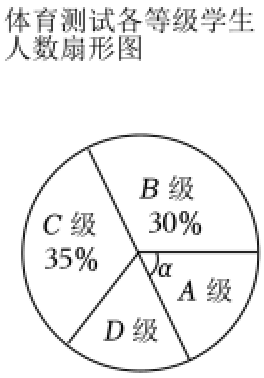
（2）若 $DE=4$，$BD=6$．求 DF 的长.



22.（10分）为了解中考体育科目训练情况，某校从九年级学生中随机抽取了部分学生进行了一次中考体育科目测试（把测试结果分为四个等级：A 级：优秀；B 级：良好；C 级：及格；D 级：不及格)，并将测试结果绘成了如下两幅不完整的统计图．请根据统计图中的信息解答下列问题：



图①



图②

（1）本次抽样测试的学生人数是 ________；

（2）图②中∠α的度数 ________，并把图①条形统计图补充完整；

（3）若该校九年级有学生 800 名，如果全部参加这次中考体育科目测试，请估计不及格的人数．体育测试各个等级学生人数．

23.（10 分）今年以来，人工智能概念风靡全球，百度公司在 3 月 16 日推出了问答虚拟机器人——文心一言，它不仅能说会道，还会画画写诗．我校科学小组在研究到它的原理后，给大家出了这样一道题：现要从“白日”、“依山尽”、“黄河”、“入海流”四个词中选出两个不同的词．（若每个词被选中的机会均等）

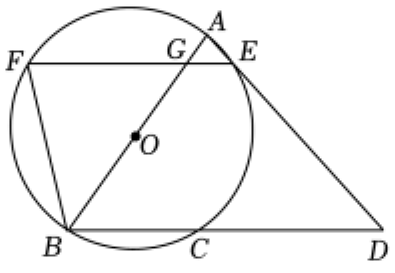
（1）若第一次已选出“白日”，则第二次选出“依山尽”的概率为 ________________；

（2）请用列表或树状图的方法，求“白日”和“依山尽”一起被选中的概率．

24.（10 分）如图，在⊙O 中，AB 为直径，BC 为弦，点 D 在 BC 的延长线上，线段 AD 交⊙O 于点 E，过点 E 作 $EF\parallel BC$ 分别交⊙O、AB 于点 F、G，连接 BF．

（1）求证：$\triangle ABD\backsim\triangle FGB$；

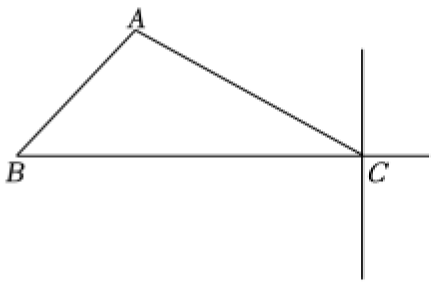
（2）当$\angle D=45°$，$AB=10$，$AD=8\sqrt{2}$时，求 FG 的长．



25.（10分）已知在△ABC中，∠A＞90°．

（1）如图，请用无刻度的直尺和圆规作出点 O，使得⊙O与AB、BC所在直线相切，且与BC的切点为点C；（不写作法，但保留作图痕迹）

（2）在（1）的条件下，已知AB＝3，BC＝6，⊙O的半径为2，则△ABC的面积为 ______．



26.（10分）某批发商以24元/箱的进价购进某种蔬菜，销往零售超市，已知这种蔬菜的标价为45元/箱，实际售价不低于标价的八折，且不高于标价．批发商通过分析销售情况，发现这种蔬菜的日销售量y（箱）与当天的售价x（元/箱）满足一次函数关系，下表是其中的两组对应值．

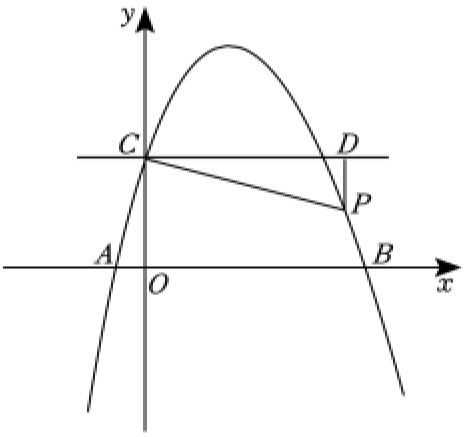
售价x（元/箱）	…	36	38	…
销售量y（箱）	…	128	124	…

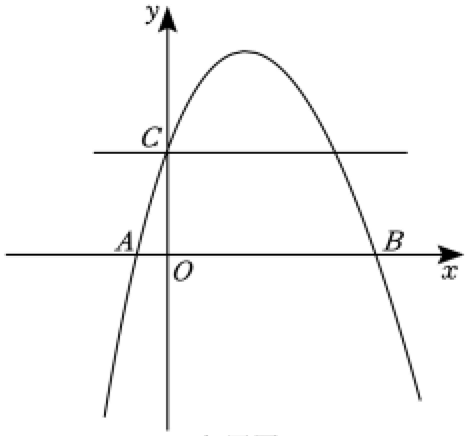
（1）直接写出y与x的函数关系式：______；

（2）若某天该批发商销售这种蔬菜获利1320元，则当天这种蔬菜售价为多少元/箱？

（3）批发商搞优惠活动，购买一箱这种蔬菜，赠送成本为6元的土豆，这种蔬菜的售价定为多少元/箱时，可使得日销售利润最大，最大日销售利润是多少元？

27.（10分）如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=-x^2+\sqrt{2}cx+c$与x轴交于点A和B（点A在点B的左侧），与y轴交于点C（0，$\sqrt{2}$）．P是抛物线上一动点（不与点C重合），过点C作平行于x轴的直线，过点P作PD∥y轴交CD于点D．





备用图

（1）求抛物线的解析式；

（2）当△CDP为等腰直角三角形时，求点 D 的坐标；

（3）将△CDP绕点 C 顺时针旋转 45°，得到△$CD'P'$（点 D 和 P 分别对应点 D'和 P'），若点 P' 恰好落在坐标轴上，请直接写出此时点 P 的坐标.

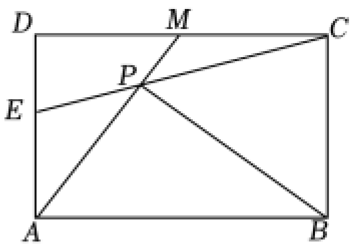
28.（10 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=4$，点 M是射线 DC 上的一个动点，连接 AM，过 B 作 $BP\perp AM$于点 P.

（1）如图①. 当点 M为边 DC 中点时，连接 CP 并延长交 AD 于点 E.

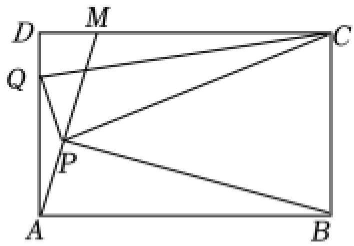
①求证：$AE=EP$；

②AE 的长为 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿. （直接写出答案）

（2）如图②，点 Q 在 AD 边上，且 $DQ=1$，当∠$CPQ=90°$ 时，求 DM的长.



图①



图②

2023年江苏省无锡外国语学校中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共30分）

1．（3分）$-\frac{2}{3}$的相反数是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{2}{3}$

【答案】A

【分析】根据相反数的含义，可得求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加“－”，据此解答即可．

【解答】解：根据相反数的含义，可得

$-\frac{2}{3}$的相反数等于：$-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$．

故选：A．

2．（3分）函数$y=\sqrt{2x+1}$中的自变量x的取值范围是（　　）

A．$x\neq-\frac{1}{2}$　　B．$x>-\frac{1}{2}$　　C．$x\geqslant-\frac{1}{2}$　　D．$x\leqslant-\frac{1}{2}$

【答案】C

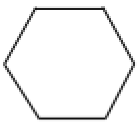
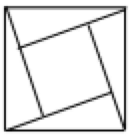
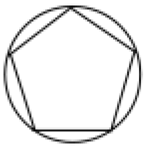
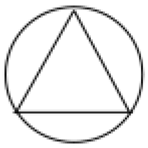
【分析】根据二次根式的被开方数是非负数列出不等式，解不等式得到答案．

【解答】解：由题意得：$2x+1\geqslant0$，

解得：$x\geqslant-\frac{1}{2}$，

故选：C．

3．（3分）下列图形既是轴对称图形，也是中心对称图形的是（　　）

A．　　B．　　C．　　D．

【答案】A

【分析】把一个图形绕某一点旋转180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，由此即可判断．

【解答】解：即是轴对称图形，也是中心对称图形的是A选项中的图形．

故选：A．

4．（3 分）下列运算结果正确的是（　　）

A．$2a+3b=5ab$　　B．$(-2a^3)^2=4a^6$

C．$x^8\div x^4=x^2$　　D．$(a+2)\cdot(2-a)=a^2-4$

【答案】B

【分析】根据合并同类项法则、幂的乘方与积的乘方的运算法则、同底数幂的除法的运算法则、平方差公式分别进行计算，即可得出答案．

【解答】解：A、$2a+3b$ 不能计算，故此选项不符合题意；

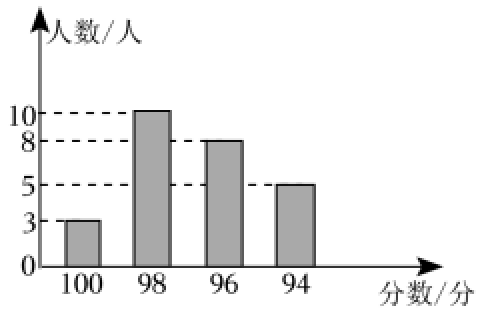
B、$(-2a^3)^2=4a^6$，故此选项符合题意；

C、$x^8\div x^4=x^4$，故此选项不符合题意；

D、$(a+2)\cdot(2-a)=(2+a)\cdot(2-a)=4-a^2$，故此选项不符合题意．

故选：B．

5．（3 分）为了增强学生预防新冠肺炎的安全意识，某校开展疫情防控知识竞赛，来自不同年级的 26 名参赛同学的得分情况如图所示，这些成绩的众数和中位数分别是（　　）



A．98，98　　B．98，97　　C．96，98　　D．96，96

【答案】B

【分析】根据中位数和众数的定义分别进行解答即可．

【解答】解：∵98 分出现了 10 次，出现的次数最多，

∴这些成绩的众数是 98 分；

∵共有 26 个数，把这些数从小到大排列，中位数是第 13、14 个数的平均数，

∴这些成绩的中位数是$\frac{98+96}{2}=97$（分）．

故选：B．

6．（3 分）已知有理数 x，y 满足方程组 $\begin{cases}3x-y=3\\2y-x=-4\end{cases}$，则 $2x+y$ 的值为（　　）

A．－1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】A

【分析】根据题意直接将两个方程相加即可求解．

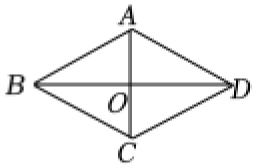
【解答】解：$\begin{cases}3x-y=3①\\2y-x=-4②\end{cases}$，

由①+②得：$3x-y+2y-x=3+(-4)$，

化简得：$2x+y=-1$，

故选：A．

7．（3 分）如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，添加下列条件不能证明▱$ABCD$ 是菱形的是（　　）



A．$\angle ABD=\angle ADB$　　B．$AC\perp BD$　　C．$AB=BC$

D．$AC=BD$

【答案】D

【分析】由菱形的判定、矩形的判定分别对各个选项进行判断即可．

【解答】解：A、∵$\angle ABD=\angle ADB$，

∴$AB=AD$，

∴▱$ABCD$ 是菱形，故选项 A 不符合题意；

B、∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC\perp BD$，

∴▱$ABCD$ 是菱形，故选项 B 不符合题意；

C、∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=BC$，

∴▱$ABCD$ 是菱形，故选项 C 不符合题意，

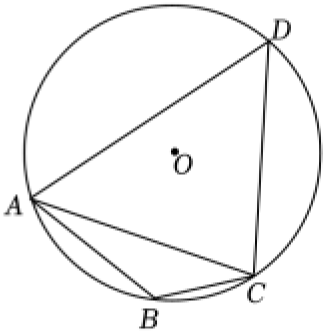
D、∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=BD$，

∴▱$ABCD$ 是矩形，故选项 D 符合题意；

故选：D．

8．（3 分）如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，$\angle ABC=135°$，$AC=1$，则⊙O 的

半径为（　　）



A．4　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【分析】先根据圆内接四边形对角互补得出$\angle ADC=45°$，由圆周角定理得出$\angle AOC=90°$，根据$OA=OC$可得出答案．

【解答】解：连接OA，OC，

$\because$四边形$ABCD$内接于$\odot O$，$\angle ABC=135°$，

$\therefore\angle ADC=45°$，

$\therefore\angle AOC=90°$，

由勾股定理得：$OA^2+OC^2=AC^2$，

$\because OA=OC$，$AC=1$，

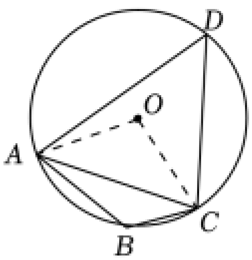
$\therefore OA^2+OC^2=1^2$，

$\therefore 2OA^2=1$，

$\therefore OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

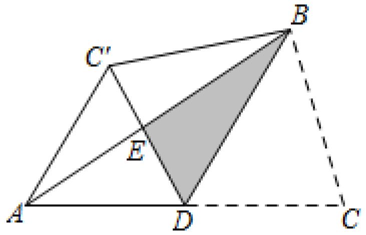
$\therefore\odot O$的半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故选：D．



9．（3分）如图，在$\triangle ABC$中，D是AC边上的中点，连接BD，把$\triangle BDC$沿BD

翻折，得到$\triangle BDC'$，DC'与 AB 交于点 E，连接 AC'，若 $AD=AC'=2$，$BD=3$，则点 D 到 BC 的距离为（　　）

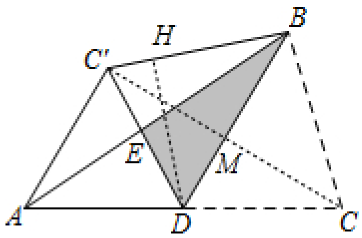


A. $\frac{2}{7}\sqrt{21}$　　B. $\frac{7}{5}\sqrt{23}$　　C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2}{7}\sqrt{23}$

【答案】C

【分析】连接 CC'，交 BD 于点 M，过点 D 作 $DH\perp BC'$于点 H，由翻折知，$\triangle BDC\cong\triangle BDC'$，$BD$ 垂直平分 CC'，证$\triangle ADC'$为等边三角形，利用解直角三角形求出 $DM=1$，$C'M=\sqrt{3}DM=\sqrt{3}$，$BM=2$，在 $Rt\triangle BMC'$中，利用勾股定理求出 BC'的长，在$\triangle BDC'$中利用面积法求出 DH 的长，则可得出答案．

【解答】解：如图，连接 CC'，交 BD 于点 M，过点 D 作 $DH\perp BC'$于点 H，



$\because AD=AC'=2$，D 是 AC 边上的中点，

$\therefore DC=AD=2$，

由翻折知，$\triangle BDC\cong\triangle BDC'$，$BD$ 垂直平分 CC'，

$\therefore DC=DC'=2$，$BC=BC'$，$CM=C'M$，

$\therefore AD=AC'=DC'=2$，

$\therefore\triangle ADC'$为等边三角形，

$\therefore\angle ADC'=\angle AC'D=\angle C'AC=60^\circ$，

$\because DC=DC'$，

$\therefore\angle DCC'=\angle DC'C=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$，

在 $Rt\triangle C'DM$ 中，

$\angle DC'C=30^\circ$，$DC'=2$，

$\therefore DM=1$，$C'M=\sqrt{3}DM=\sqrt{3}$，

∴$BM=BD-DM=3-1=2$，

在 Rt△BMC'中，

$BC'=\sqrt{BM^2+C'M^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

∵$S_{\triangle BDC'}=\frac{1}{2}BC'\cdot DH=\frac{1}{4}BD\cdot CM$，

∴$\sqrt{7}DH=3\times\sqrt{3}$，

∴$DH=\frac{3\sqrt{21}}{7}$，

∵$\angle DCB=\angle DBC'$，

∴点 D 到 BC 的距离为$\frac{3\sqrt{21}}{7}$，

故选：C．

10．（3 分）定义在平面直角坐标系 xOy 中，若某函数的图象上存在点 P（x，y），满足 $y=mx+m$，m 为正整数，则称点 P 为该函数的“m 倍点”，例如：$m=2$ 时，点（－2，－2）即为函数）＝$3x+4$ 的“2 倍点”．

①点（－3，－2）是函数 $y=\frac{6}{x}$的“1 倍点”；

②若函数 $y=-x^2+bx$ 存在唯一的“3 倍点”，则 b 的值为 $3+2\sqrt{3}$；

③若函数 $y=-x+2m+1$ 的“m 倍点”在以点（－1，5）为圆心，$2m$ 为半径的圆内，则 m 为大于 1 的所有整数．

上述说法正确的有（　　）

A．①　　B．①②　　C．①③　　D．①②③

【答案】C

【分析】根据函数的“m 倍点”的定义即可判断①；确定函数 $y=-x^2+bx$ 存在唯一的“3 倍点”，则 $m=3$，满足 $y=3x+3$，两函数有唯一一个交点，△＝0，求得 b 的值可判断②；根据定义可知：“m 倍点”的横纵坐标是 $y=mx+m$ 与 $y=-x+2m+1$ 的公共解，计算可得其解为 $x=1$ 且 $y=2m$，根据函数 $y=-x+2m+1$ 的“m 倍点”，再以点（－1，5）为圆心，半径长为 $2m$ 的圆内，列不等式求得解集即可判断③．

【解答】解：①当 $m=1$ 时，

∵$mx+m=-3\times1+1=-2$，$-3\times(-2)=6$，

∴点（－3，－2）是函数 $y=\frac{6}{x}$的“1 倍点”；

∴①正确；

②当 $m=3$ 时，$y=3x+3$，

∵函数 $y=-x^2+bx$ 存在唯一的“3 倍点”，

∴$3x+3=-x^2+bx$，

∴$x^2+(3-b)x+3=0$，

∴$\triangle=(3-b)^2-4\times1\times3=0$，

∴$b=3\pm2\sqrt{3}$；

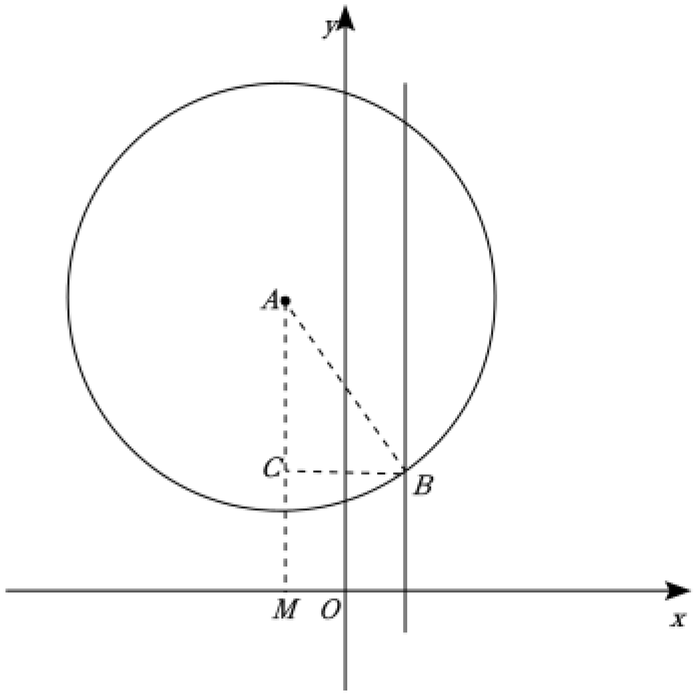
∴②错误；

③）∵$\begin{cases}y=-x+2m+1\\y=mx+m\end{cases}$，

∴$\begin{cases}x=1\\y=2m\end{cases}$，

∴函数 $y=-x+2m+1$ 的“m 倍点”为（1，$2m$），

如图所示，直线 $x=1$ 与⊙A 交于点 B，连接 AB，过点 B 作 $BC\perp y$ 轴于 C，



∴$AC=\sqrt{(2m)^2-2^2}=\sqrt{4m^2-4}$，

∴$5-\sqrt{4m^2-4}<2m$，

∴$m>\frac{29}{20}$，

∵m为正整数，

∴$m>1$的所有整数．

∴③正确．

故选：C．

二、填空题（共24分）

11．（3分）风能是一种清洁能源，我国风能储量很大，仅陆地上风能储量就有253000兆瓦，用科学记数法表示为 $\underline{\quad 2.53\times10^{5}\quad}$兆瓦．

【答案】见试题解答内容

【分析】科学记数法的表示形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant10$时，n是正数；当原数的绝对值<1时，n是负数．

【解答】解：数字253000用科学记数法可表示为2.53×10^{5}．

故答案为：2.53×10^{5}．

12．（3分）因式分解：$2x^{2}-2=$ $\underline{\quad 2(x+1)(x-1)\quad}$．

【答案】见试题解答内容

【分析】首先提公因式2，再利用平方差公式进行二次分解．

【解答】解：原式$=2(x^{2}-1)=2(x+1)(x-1)$．

故答案为：$2(x+1)(x-1)$．

13．（3分）圆锥底面圆的半径为$3m$，母线长为$6m$，则圆锥的侧面积为 $\underline{\quad 18\pi cm^{2}\quad}$．

【答案】见试题解答内容

【分析】根据圆锥的侧面积就等于经母线长乘底面周长的一半．依此公式计算即可解决问题．

【解答】解：圆锥的侧面积$=6\times6\pi\div2=18\pi cm^{2}$．

故答案为：$18\pi cm^{2}$．

14．（3分）命题“如果$a>b$，则$|a|>|b|$”是 $\underline{\quad 假\quad}$命题（填“真”或“假”）．

【答案】假．

【分析】找到一对满足题设但不满足结论的数即可判断该命题为假命题．

【解答】解：当$a=1$，$b=-2$时，满足$a>b$，

但$|1|<|-2|$，不满足$|a|>|b|$，

∴命题“如果 $a>b$，则$|a|>|b|$”是假命题，

故答案为：假．

15.（3 分）计算$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{1-x}$的结果是__$\frac{x^2+1}{x-1}$__．

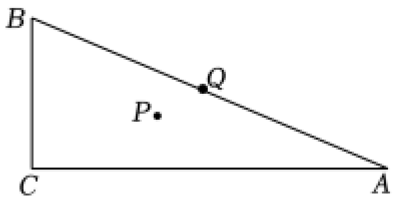
【答案】$\frac{x^2+1}{x-1}$．

【分析】先把分式化成同分母，再根据同分母分式相加减，分母不变，分子相加减，即可得出答案．

【解答】解：$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2+1}{x-1}$；

故答案为：$\frac{x^2+1}{x-1}$．

16.（3 分）如图，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，AC＝15，BC＝8，则此 Rt△ABC 的重心 P 与外心 Q 之间的距离为 __$\frac{17}{6}$__．



【答案】$\frac{17}{6}$．

【分析】根据三角形外心的定义可知外心 Q 为斜边 AB 的中点，根据三角形重心的定义可知 C、P、Q 三点共线，根据勾股定理求出 AB＝17，利用直角三角形斜边的中线等于斜边的一半得出 $CQ=\frac{1}{2}AB=\frac{17}{2}$，然后利用重心的性质得到 $PQ=\frac{1}{3}CQ=\frac{17}{6}$．

【解答】解：根据题意可知，C、P、Q 三点共线．

在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，AC＝15，BC＝8，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{15^2+8^2}=17$，

∵Rt△ABC 的外心为 Q，

∴Q 为斜边 AB 的中点，

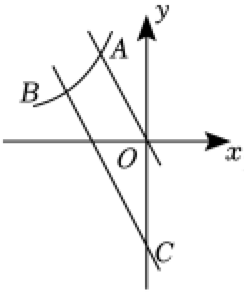
∴$CQ=\frac{1}{2}AB=\frac{17}{2}$，

∵Rt△ABC 的重心为 P，

$\therefore PQ=\frac{1}{3}CQ=\frac{17}{6}$.

故答案为：$\frac{17}{6}$.

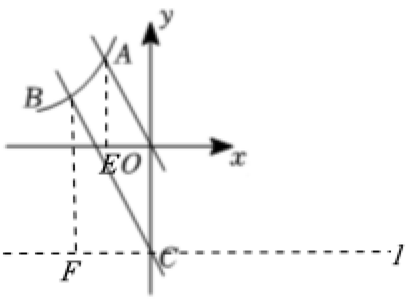
17.（3 分）如图，正比例函数 $y=-2x$ 与反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$（$x<0$）的图象有一个交点 A，直线 $BC\parallel OA$，交反比例函数的图象于点 B，交 y 轴于点 C，若 $BC=2OA$，则直线 BC 的解析式为 <u>$y=-2x-6$</u>.



【答案】$y=-2x-6$.

【分析】添加辅助线，构造相似三角形，利用相似比，列等式，求出点 C 的坐标，再确定直线 BC 的解析式.

【解答】解：过点 C 作直线 l 平行于 x 轴，分别过点 A、点 B 作 $AE\perp x$ 轴，$BF\perp l$，垂足分别为点 E、F，



$\because$ 直线 $BC\parallel OA$，

$\therefore$ 可设 BC 直线为 $y=-2x+b$，

$\because$ 正比例函数 $y=-2x$ 与反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$（$x<0$）图象有一个交点 A，

$\begin{cases} y=-2x \\ y=-\frac{8}{x} \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$（$x=2$ 时，$y=-4$，此时的点在第四象限不符合题意舍去），

或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore$ 点 A 坐标为（-2，4），

∵直线 $BC\parallel OA$，$BC=2OA$，$\triangle AEO\backsim\triangle BFC$，

∴$\frac{AO}{BC}=\frac{1}{2}=\frac{AE}{BF}=\frac{OE}{CF}$，即$\frac{1}{2}=\frac{4}{BF}=\frac{2}{FC}$，

∴$FC=4$，$BF=8$，

∵点 B 在反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$（$x<0$）的图象上，

∴把点 B 的横坐标－4 代入解析式得 $y=-\frac{8}{-4}=2$，

∴点 B 的坐标为（－4，2），

∴$OC=BF-2=8-2=6$，

∴点 C 坐标为（0，－6），

∴代入 BC 直线 $y=-2x+b$，即 $-6=b$，

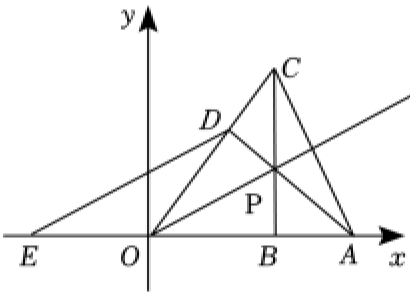
∴直线 BC 的解析式为：$y=-2x-6$.

故答案为：$y=-2x-6$.

18.（3 分）如图，在平面直角坐标系中，已知 A（4，0），射线 OT 满足 $\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$，点 P 为射线 OT 上的一个动点，过 P 作 $PB\perp x$ 轴于 B，过 A 作 $AC\perp$射线 OT 交 BP 延长线于点 C，连接 AP 并延长交 OC 于点 D．过 D 作 $DE\parallel$射线 OT 交 x 轴于点 E.

（1）若 $OB=2$，则 C 坐标为 <u>（2，4）</u>；

（2）AE 的最大值为 <u>$2\sqrt{5}+2$</u>.



【答案】（1）（2，4）；

（2）$2\sqrt{5}+2$.

【分析】（1）在 Rt$\triangle ABC$ 中，利用解直角三角形求出 CB 的长，即可确定点 C 的坐标；

（2）先确定点 D 的运动轨迹是以 OA 为直径的圆，再判断出当 DE 是该圆的切线时，AE 最大，从而求出 AE 的最大值.

【解答】解：（1）∵$PB\perp x$轴，$AC\perp OT$，

∴$\angle ACB=90^\circ-\angle OAC$，$\angle TOA=90^\circ-\angle OAC$，

∴$\angle ACB=\angle TOA$，

∵$\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$，

∴$\tan\angle ACB=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{AB}{CB}=\frac{1}{2}$，

∵A（4，0），

∴$OA=4$，

∵$OB=2$，

∴$CB=4$，

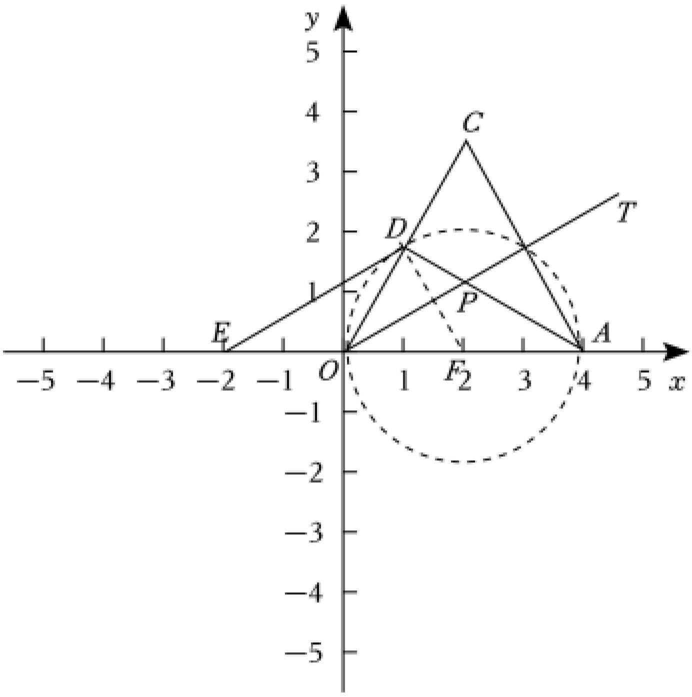
∴点C坐标为（2，4），

故答案为：（2，4）；

（2）由题意，可知点P是$\triangle OAC$的垂心，

∴$AD\perp OC$，

∴点D在以OA为直径的圆周上，设此圆为$\odot F$，如图，



要使AE最大，只要DE与$\odot F$相切即可，

在$\text{Rt}\triangle FED$中，

∵$DE\parallel OT$,

∴$\angle DEA=\angle TOA$,

∴$\tan\angle DEA=\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$,

∴$\frac{FD}{DE}=\frac{1}{2}$,

∵$FD=\frac{1}{2}OA=2$,

∴$DE=4$,

∴$EF=\sqrt{DF^2+DE^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$,

∴AE 的最大值为 $EF+FA=2\sqrt{5}+2$,

故答案为：$2\sqrt{5}+2$.

三、解答题（共 96 分）

19.（8 分）计算与化简：

（1）$(-2)^{-1}+2\cos30°-\sqrt{9}$.

（2）$(a+1)-(a-2)-(a-3)^2$.

【答案】（1）$-3.5+\sqrt{3}$；

（2）$-a^2+6a-6$.

【分析】（1）先计算负整数指数幂、殊角的三角函数值、开平方，最后计算乘法加法.

（2）去括号，合并同类项.

【解答】解：（1）$(-2)^{-1}+2\cos30°-\sqrt{9}$

$=-\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3$

$=-3.5+\sqrt{3}$；

（2）$(a+1)-(a-2)-(a-3)^2$

$=a+1-a+2-a^2+6a-9$

$=-a^2+6a-6$.

20.（8 分）解方程与不等式组：

（1）$2x^2-2x-1=0$；

（2）$\begin{cases}3x-(x-2)>6\\ \frac{2x+1}{3}\leqslant x\end{cases}$.

【答案】（1）$x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$；

（2）$x>2$．

【分析】（1）根据公式法：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geqslant0$）解一元二次方程即可；

（2）先解每个不等式，再求两个不等式解集的公共部分即可．

【解答】解：（1）$2x^2-2x-1=0$，

$a=2$，$b=-2$，$c=-1$，

$\because\triangle=4-4\times2\times(-1)=12>0$，

$\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$；

（2）$\begin{cases}3x-(x-2)>6①\\ \frac{2x+1}{3}\leqslant x②\end{cases}$，

解不等式①，得 $x>2$，

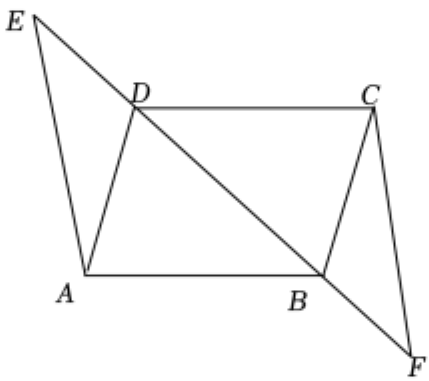
解不等式②，得 $x\geqslant1$，

∴原不等式组的解集为 $x>2$．

21．（10分）已知：如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，点 E，D，B，F 在同一条直线上，$\angle E=\angle F$．

（1）求证：$\triangle ADE\cong\triangle CBF$；

（2）若 $DE=4$，$BD=6$．求 DF 的长．



【答案】（1）证明见解析；

（2）10．

【分析】（1）由平行四边形的性质得出 $AD\parallel BC$，$AD=BC$，证出$\angle ADB=\angle DBC$，根据 AAS 可证明$\triangle ADE\cong\triangle CBF$；

（2）由全等三角形的性质可得出答案．

【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$AD=BC$，

∴$\angle ADB=\angle DBC$，

在$\triangle ADE$和$\triangle CBF$中，

$$\begin{cases}\angle E=\angle F\\ \angle ADE=\angle CBF,\\ AD=CB\end{cases}$$

∴$\triangle ADE\cong\triangle CBF$（$AAS$）；

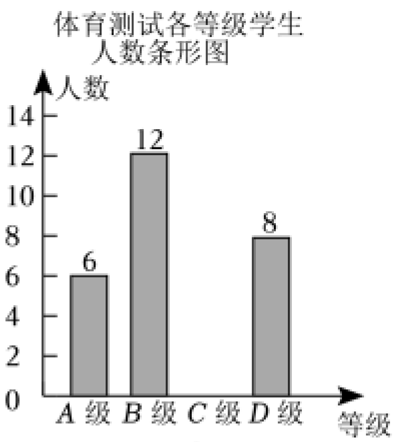
（2）解：∵$\triangle ADE\cong\triangle CBF$，

∴$DE=BF=4$，

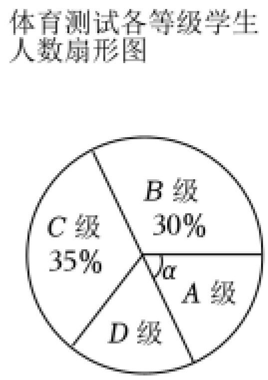
又∵$BD=6$，

∴$DF=BD+BF=6+4=10$．

22．（10分）为了解中考体育科目训练情况，某校从九年级学生中随机抽取了部分学生进行了一次中考体育科目测试（把测试结果分为四个等级：A级：优秀；B级：良好；C级：及格；D级：不及格），并将测试结果绘成了如下两幅不完整的统计图．请根据统计图中的信息解答下列问题：



图①



图②

（1）本次抽样测试的学生人数是 __40__；

（2）图②中∠α的度数 __54°__，并把图①条形统计图补充完整；

（3）若该校九年级有学生 800 名，如果全部参加这次中考体育科目测试，请

估计不及格的人数．体育测试各个等级学生人数．

【答案】160 人．

【分析】（1）由 B 级人数及其所占百分比可得被调查的总人数；

（2）用 360° 乘以 A 级人数所占比例，由四个等级人数和等于总人数求出 C 级人数，从而补全图形；

（3）用总人数乘以样本中不及格人数所占比例即可．

【解答】解：（1）$12\div 30\%=40$（人），

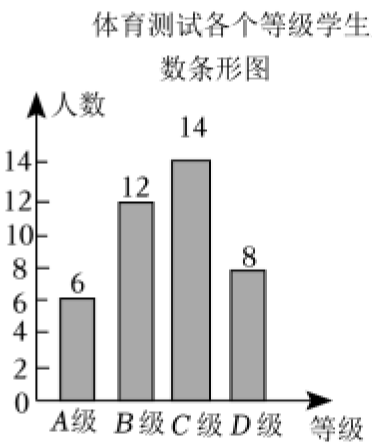
故本次抽样测试的学生人数是 40 人；

故答案为：40；

（2）$\angle\alpha$的度数是 $360°\times\frac{6}{40}=54°$，

C 级人数为 $40-6-12-8=14$（人），

把条形统计图补充完整，如图所示：



故答案为：54°．

（3）$800\times\frac{8}{40}=160$（人）．

故不及格的人数约有 160 人．

23．（10 分）今年以来，人工智能概念风靡全球，百度公司在 3 月 16 日推出了问答虚拟机器人——文心一言，它不仅能说会道，还会画画写诗．我校科学小组在研究到它的原理后，给大家出了这样一道题：现要从“白日”、“依山尽”、“黄河”、“入海流”四个词中选出两个不同的词．（若每个词被选中的机会均等）

（1）若第一次已选出“白日”，则第二次选出“依山尽”的概率为 $\underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$；

（2）请用列表或树状图的方法，求“白日”和“依山尽”一起被选中的概率．

【答案】（1）$\frac{1}{3}$；

（2）$\frac{1}{6}$．

【分析】（1）直接根据概率公式求解即可．

（2）根据题意列出图表，得出所有等可能的情况数，找出符合条件的情况数，再根据概率公式即可得出答案．

【解答】解：（1）第一次已选出“白日”，则第二次选出“依山尽”的概率为 $\frac{1}{3}$．

故答案为：$\frac{1}{3}$；

（2）根据题意列表如下：

	白日	依山尽	黄河	入海流
白日		（白日，依山尽）	（白日，黄河）	（白日，入海流）
依山尽	（依山尽，白日）		（依山尽，黄河）	（依山尽，入海流）
黄河	（黄河，白日）	（黄河，依山尽）		（黄河，入海流）
入海流	（入海流，白日）	（入海流，依山尽）	（入海流，黄河）	

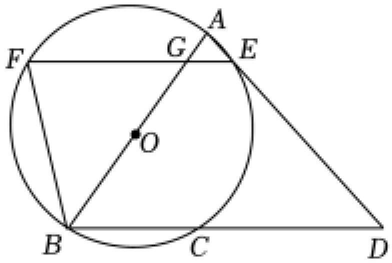
共有 12 中等可能的情况数，其中“白日”和“依山尽”一起被选中的情况数有 2 种，

则“白日”和“依山尽”一起被选中的概率是 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$．

24．（10 分）如图，在⊙O 中，AB 为直径，BC 为弦，点 D 在 BC 的延长线上，线段 AD 交⊙O 于点 E，过点 E 作 $EF\parallel BC$ 分别交⊙O、AB 于点 F、G，连接 BF．

（1）求证：$\triangle ABD\backsim\triangle FGB$；

（2）当 $\angle D=45°$，$AB=10$，$AD=8\sqrt{2}$ 时，求 FG 的长．



【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{25}{4}$.

【分析】（1）可证明△AGE∽△ABD，△AGE∽△FGB，进而得出结论；

（2）连接 BE 和 AC，可求得 CD 和 AD，DE，AE，进而根据△AGE∽△ABD，求得 EG 和 AG，BG 的长，根据△ABD∽△FGB 可求得 FG.

【解答】（1）证明：∵$EF \parallel BC$，

∴$\angle AGE=\angle ABD$，$\angle AEG=\angle D$，

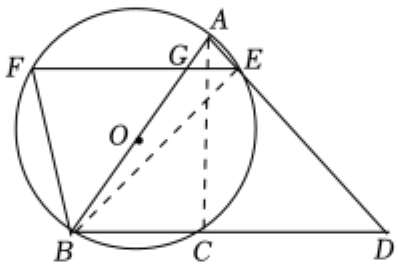
∴△AGE∽△ABD，

∵$\angle AEF=\angle ABF$，$\angle F=\angle BAE$，

∴△AGE∽△FGB，

∴△ABD∽△FGB；

（2）解：如图，连接 BE，AC，



∵AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle BED=\angle AEB=90°$，$\angle ACD=\angle ACB=90°$，

∵$AD=8\sqrt{2}$，$\angle D=45°$，

∴$AC=CD=AD\cdot\sin D=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$，

∴$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

∴$BD=BC+CD=14$，

∴$DE=BD\cdot\cos D=14\cdot\cos45°=7\sqrt{2}$，

$\therefore AE=AD-DE=8\sqrt{2}-7\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

由（1）知，

$\triangle AGE\backsim\triangle ABD$，$\triangle ABD\backsim\triangle FGB$；

$\therefore \frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AB}=\frac{AE}{AD}$，$\frac{BG}{BD}=\frac{FG}{AB}$，

$\therefore \frac{EG}{14}=\frac{AG}{10}=\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$，

$\therefore EG=\frac{7}{4}$，$AG=\frac{5}{4}$，

$\therefore BG=AB-AG=10-\frac{5}{4}=\frac{35}{4}$，

$\therefore \frac{\frac{35}{4}}{14}=\frac{FG}{10}$，

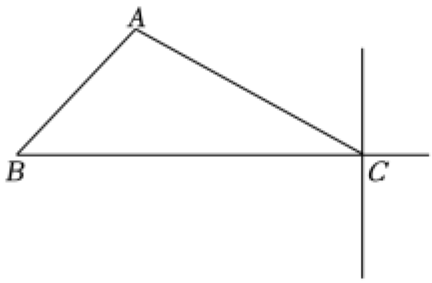
解得 $FG=\frac{25}{4}$，

即 FG 的长为$\frac{25}{4}$.

25.（10 分）已知在$\triangle ABC$ 中，$\angle A>90°$.

（1）如图，请用无刻度的直尺和圆规作出点 O，使得$\odot O$ 与 AB、BC 所在直线相切，且与 BC 的切点为点 C；（不写作法，但保留作图痕迹）

（2）在（1）的条件下，已知 $AB=3$，$BC=6$，$\odot O$ 的半径为 2，则$\triangle ABC$ 的面积为 ___$\frac{27}{5}$___.



【答案】（1）见解答；

（2）$\frac{27}{5}$.

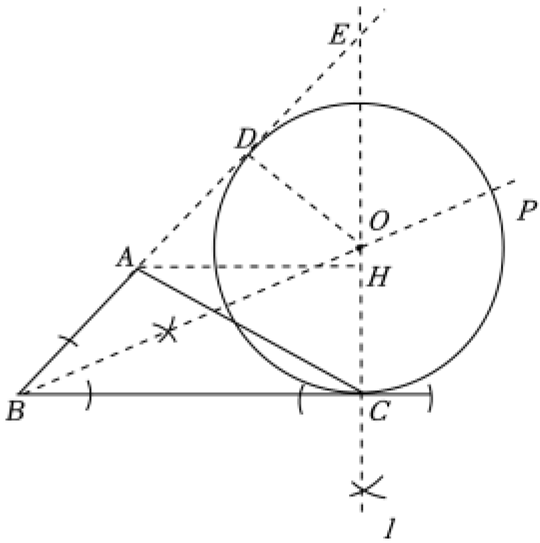
【分析】（1）过 C 点作 BC 的垂线 l，再作$\angle ABC$ 的平分线 BP，BP 交直线 l 于 O 点，然后以 O 点为圆心，OC 为半径作图，根据角平分线的性质得到 $OC=OD$，然后根据切线的判定方法得到$\odot O$ 与 AB、BC 所在直线相切；

（2）过 O 点作 $OD\perp BA$ 于 D 点，CO 的延长线交 BA 的延长线于点 E，过 A

点作 $AH\perp CE$ 于 H 点，如图，根据切线的性质得到 $OC\perp BC$，$OC=OD=2$，再证明 $BD=BC=6$，则 $AD=3$，接着证明$\triangle EDO\backsim\triangle ECB$，利用相似比可求出 $OE=\frac{5}{2}$，$DE=\frac{3}{2}$，然后证明$\triangle EAH\backsim\triangle EBC$，利用相似比求出 $AH=\frac{18}{5}$，最利用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCE}-S_{\triangle ACE}$进行计算即可．

【解答】解：（1）如图，过 C 点作 BC 的垂线 l，再作$\angle ABC$ 的平分线 BP，BP 交直线 l 于 O 点，然后以 O 点为圆心，OC 为半径作图，

则⊙O 为所作；



（2）过 O 点作 $OD\perp BA$ 于 D 点，CO 的延长线交 BA 的延长线于点 E，过 A 点作 $AH\perp CE$ 于 H 点，如图，

∵⊙O 与 BA，与 BC 相切于点 C，

∴$OC\perp BC$，$OC=OD=2$，

∵$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}$，$BC=\sqrt{OB^2-OC^2}$，

∴$BD=BC=6$，

∴$AD=BD-BA=3$，

∵$\angle EDO=\angle ECB$，$\angle OED=\angle BEC$，

∴$\triangle EDO\backsim\triangle ECB$，

∴$\frac{ED}{EC}=\frac{OE}{BE}=\frac{OD}{BC}$，即$\frac{DE}{OE+2}=\frac{OE}{6+DE}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

即 $3DE=OE+2$ 且 $3OE=6+DE$，

解得 $OE=\frac{5}{2}$，$DE=\frac{3}{2}$，

$\because AH\parallel BC$，

$\therefore \triangle EAH\backsim\triangle EBC$，

$\therefore \frac{AH}{BC}=\frac{EA}{EB}$，即$\frac{AH}{6}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$，

解得 $AH=\frac{18}{5}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCE}-S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times 6-\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{18}{5}=\frac{27}{5}$.

故答案为：$\frac{27}{5}$.

26.（10 分）某批发商以 24 元/箱的进价购进某种蔬菜，销往零售超市，已知这种蔬菜的标价为 45 元/箱，实际售价不低于标价的八折，且不高于标价．批发商通过分析销售情况，发现这种蔬菜的日销售量 y（箱）与当天的售价 x（元/箱）满足一次函数关系，下表是其中的两组对应值．

售价 x（元/箱）	…	36	38	…
销售量 y（箱）	…	128	124	…

（1）直接写出 y 与 x 的函数关系式：$\underline{\quad y=-2x+200\quad}$；

（2）若某天该批发商销售这种蔬菜获利 1320 元，则当天这种蔬菜售价为多少元/箱？

（3）批发商搞优惠活动，购买一箱这种蔬菜，赠送成本为 6 元的土豆，这种蔬菜的售价定为多少元/箱时，可使得日销售利润最大，最大日销售利润是多少元？

【答案】（1）$y=-2x+200$；（2）当获利为 1320 元时，当天这种蔬菜的售价无解；（3）蔬菜的售价为 45 元，可获得最大日利润为 1650 元．

【分析】（1）设 y 与 x 之间的函数关系为 $y=kx+b$，用待定系数法求函数解析式即可；

（2）根据题意列出关于 x 的一元二次方程，解方程求出 x 的值，然后根据这种蔬菜的标价为 45 元/箱，实际售价不低于标价的八折得出 x 的取值范围为 $36\leqslant x\leqslant 45$，从而确定方程的解；

（3）根据每天的利润＝单箱的利润×销量列出函数解析式，再根据函数的性质求函数的最值．

【解答】解：（1）设 y 与 x 之间的函数关系为 $y=kx+b$，

根据题意得：$\begin{cases}36k+b=128\\38k+b=124\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-2\\b=200\end{cases}$，

∴$y=-2x+200$；

故答案为：$y=-2x+200$；

（2）根据题意得：$(-2x+200)(x-24)=1920$，

解得 $x_1=34$，$x_2=90$，

∵这种蔬菜售价不低于 $45\times0.8=36$，且不高于 45，

∴$36\leqslant x\leqslant45$，

∴34，90 都不满足题意，

答：当获利为 1320 元时，当天这种蔬菜的售价无解；

（3）设日获得利润为 w 元，

则 $w=(-2x+200)(x-24-6)=-2(x-65)^2+2450$，

∵$a=-2<0$，

∴抛物线开口向下，

∴当 $x<65$ 时，w 的值随 x 值的增大而增大，

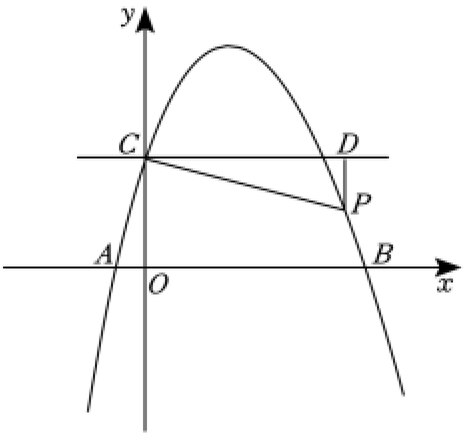
∵这种蔬菜售价不低于 $45\times0.8=36$，

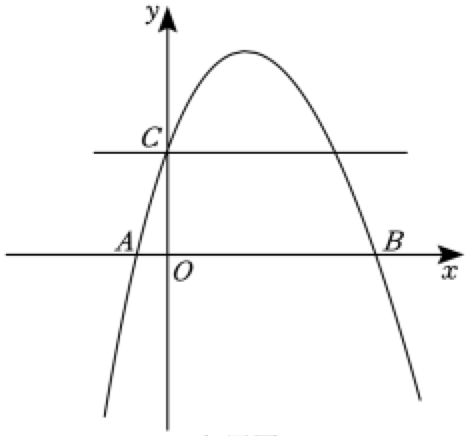
∴$36\leqslant x\leqslant45$，

∴当 $x=45$ 时，$W_{最大}=-2\times(45-65)^2+2450=1650$（元），

答：这种蔬菜的售价为 45 元，可获得最大日利润为 1650 元．

27．（10 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=-x^2+\sqrt{2}cx+c$ 与 x 轴交于点 A 和 B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 $C(0,\sqrt{2})$．P 是抛物线上一动点（不与点 C 重合），过点 C 作平行于 x 轴的直线，过点 P 作 $PD\parallel y$ 轴交 CD 于点 D．





备用图

（1）求抛物线的解析式；

（2）当△CDP为等腰直角三角形时，求点 D 的坐标；

（3）将△CDP绕点 C 顺时针旋转 45°，得到△$CD'P'$（点 D 和 P 分别对应点 D'和 P'），若点 P' 恰好落在坐标轴上，请直接写出此时点 P 的坐标．

【答案】（1）$y=-x^2+2x+\sqrt{2}$；

（2）点 D 的坐标为（3，$\sqrt{2}$）或（1，$\sqrt{2}$）；

（3）点 P 的坐标为（3，$\sqrt{2}-3$）或（-1，$\sqrt{2}-3$）．

【分析】（1）把点 C 的坐标代入抛物线的解析式中即求出抛物线解析式；

（2）根据 $CD=PD$ 列方程可解答；

（3）由于点 P'落在坐标轴上，故有两种情况需分类讨论．①当点 P'在 y 轴上时，根据（2）可得结论；②当点 P'在 x 轴上时，设 P（m，$-m^2+2m+\sqrt{2}$），表示 PH，OH，作辅助线，构建 $CH=CH'$，列方程，进而求得结论．

【解答】解：（1）把点 C（0，$\sqrt{2}$）代入抛物线 $y=-x^2+\sqrt{2}cx+c$ 中得：$c=\sqrt{2}$，

∴抛物线的解析式为：$y=-x^2+2x+\sqrt{2}$；

（2）设点 P 的坐标为（x，$-x^2+2x+\sqrt{2}$），则 $CD=|x|$，$PD=|-x^2+2x+\sqrt{2}-\sqrt{2}|=|-x^2+2x|$，

∴点 D 的坐标为（x，$\sqrt{2}$），

∵△CDP 是等腰直角三角形，

∴$CD=PD$，

∴$|-x^2+2x|=|x|$，

$\therefore x=3$ 或 $x=0$（舍去）或 $x=1$，

故点 D 的坐标为（3，$\sqrt{2}$）或（1，$\sqrt{2}$）；

（3）分两种情况：

①当点 P'落在 y 轴的负半轴上时，如图 2，

此时△CDP 是等腰直角三角形，则 P（3，$\sqrt{2}-3$）；

②当点 P'落在 x 轴的负半轴上时，如图 3，

过点 P 作 $PH\perp y$ 轴于 H，将△PCH 绕点 C 顺时针旋转 45°得到△$CP'H'$，则 $\angle HCH'=45°$，

$\therefore$△COE 是等腰直角三角形，

$\therefore OC=OE=\sqrt{2}$，$CE=2$，

$\because \angle OEC=\angle P'EH'=45°$，$\angle H'=\angle CHP=90°$，

$\therefore$△$EP'H'$为等腰直角三角形，

$\therefore EH'=P'H'$，

设 P（m，$-m^2+2m+\sqrt{2}$），

$\therefore EH'=PH=-m$，$OH=m^2-2m-\sqrt{2}$，

$\because CH'=CH$，

$\therefore 2-m=\sqrt{2}+m^2-2m-\sqrt{2}$，

解得：$m=2$（舍）或 -1，

$\therefore P$（-1，$\sqrt{2}-3$），

综上所述，点 P 的坐标为（3，$\sqrt{2}-3$）或（-1，$\sqrt{2}-3$）．

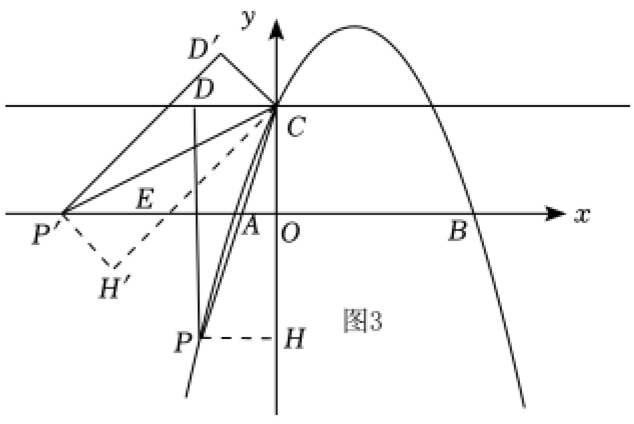


图3

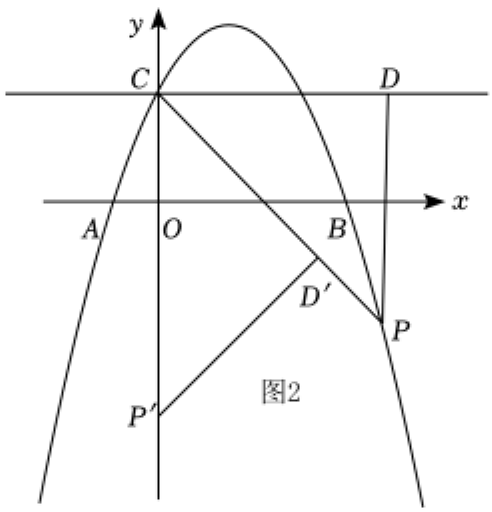


图2

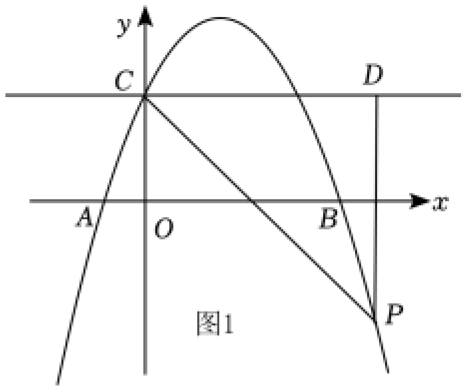


图1

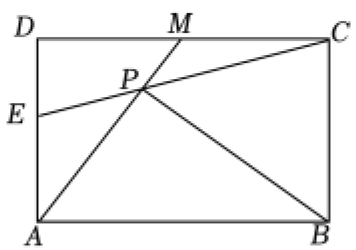
28.（10分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=4$，点 M 是射线 DC 上的一个动点，连接 AM，过 B 作 $BP\perp AM$ 于点 P.

（1）如图①．当点 M 为边 DC 中点时，连接 CP 并延长交 AD 于点 E.

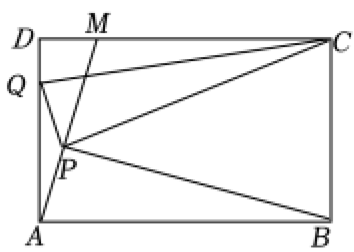
①求证：$AE=EP$；

②AE 的长为 __$\frac{9}{4}$__．（直接写出答案）

（2）如图②，点 Q 在 AD 边上，且 $DQ=1$，当 $\angle CPQ=90°$ 时，求 DM 的长.



图①



图②

【答案】（1）①证明见解答过程；

②$\frac{9}{4}$；

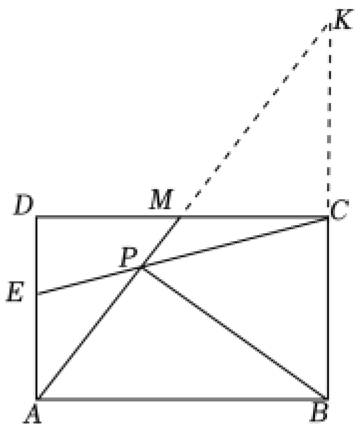
（2）DM的长是 $7-\sqrt{33}$或 $7+\sqrt{33}$．

【分析】（1）①延长 BC，AM交于 K，证明$\triangle ADM\cong\triangle KCM$（$ASA$），可得 $AD=CK=BC$，又 $BP\perp AM$，故 $PC=BC=CK=\frac{1}{2}BK=4$，得$\angle K=\angle CPK$，即可得$\angle APE=\angle EAP$，$AE=EP$；

②设 $AE=x$，在 Rt$\triangle CDE$ 中，有（$4-x$）$^2+6^2=$（$4+x$）^{2}，即可解得 $AE=\frac{9}{4}$；

（2）分两种情况：①点 M在线段 CD 上时，过点 P 作 $GH\parallel CD$，交 AD 于 G，交 BC 于 H，设 $DM=x$，$QG=a$，由$\triangle AGP\backsim\triangle ADM$，可得 $PG=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}ax$，由$\angle QPG=90°-\angle CPH=\angle PCH$，$\tan\angle QPG=\tan\angle PCH$，有 $PH\cdot PG=QG\cdot CH$，同理可得 $PG\cdot PH=AG\cdot BH=AG^2$，故（$3-a$）$^2=a\cdot$（$a+1$），解得 $a=\frac{9}{7}$，根据 $PG\cdot PH=AG^2$，知$\frac{3}{7}x\cdot$（$6-\frac{3}{7}x$）$=$（$3-\frac{9}{7}$）^{2}，从而解得 $DM=7-\sqrt{33}$，②当 M在 DC的延长线上时，同理得 $DM=7+\sqrt{33}$．

【解答】（1）①证明：延长 BC，AM交于 K，如图：



∵M是 CD 的中点，

∴$DM=CM$，

∵$\angle D=\angle MCK=90°$，$\angle AMD=\angle KMC$，

∴$\triangle ADM\cong\triangle KCM$（$ASA$），

∴$AD=CK=BC$，

∴C为 BK中点，

∵$BP\perp AM$，

∴$\angle BPK=90°$，

∴$PC=BC=CK=\frac{1}{2}BK=4$，

∴$\angle K=\angle CPK$，

∵$\angle APE=\angle CPK$，$\angle K=\angle EAP$，

∴$\angle APE=\angle EAP$，

∴$AE=EP$；

②解：设 $AE=x$，

由①知：$AE=EP$，$CP=4$，

∴$EP=x$，$ED=4-x$，$CE=4+x$，

在 Rt△CDE 中，$ED^2+CD^2=CE^2$，

∴$(4-x)^2+6^2=(4+x)^2$，

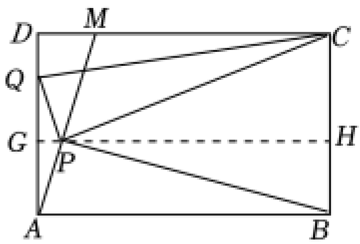
解得 $x=\frac{9}{4}$，

∴$AE=\frac{9}{4}$；

故答案为：$\frac{9}{4}$；

（2）解：分两种情况：

①点 M 在线段 CD 上时，过点 P 作 $GH\parallel CD$，交 AD 于 G，交 BC 于 H，如图：



设 $DM=x$，$QG=a$，则 $DG=CH=a+1$，$BH=AG=4-CH=4-(a+1)=3-a$，

∵$PG\parallel DM$，

∴△AGP∽△ADM，

∴$\frac{PG}{DM}=\frac{AG}{AD}$，即$\frac{PG}{x}=\frac{3-a}{4}$，

∴$PG=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}ax$，

∵$\angle CPQ=90°$，

$\therefore \angle QPG=90°-\angle CPH=\angle PCH$,

$\therefore \tan\angle QPG=\tan\angle PCH$，即$\frac{QG}{PG}=\frac{PH}{CH}$,

$\therefore PH\cdot PG=QG\cdot CH$,

由$\angle APB=90°$，同理可得$\angle APG=\angle PBH$,

$\therefore \tan\angle APG=\tan\angle PBH$，即$\frac{AG}{PG}=\frac{PH}{BH}$,

$\therefore PG\cdot PH=AG\cdot BH=AG^2$,

$\therefore AG^2=QG\cdot CH$，即$(3-a)^2=a\cdot(a+1)$,

解得 $a=\frac{9}{7}$,

$\therefore PG=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}ax=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\times\frac{9}{7}x=\frac{3}{7}x$，$PH=6-PG=6-\frac{3}{7}x$,

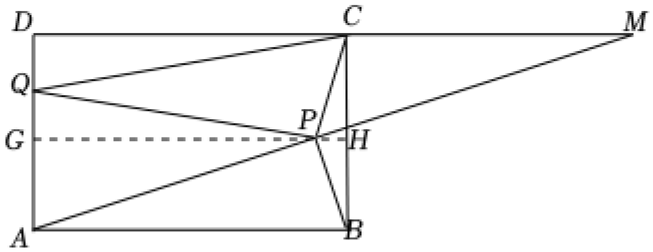
$\because PG\cdot PH=AG^2$,

$\therefore \frac{3}{7}x\cdot(6-\frac{3}{7}x)=(3-\frac{9}{7})^2$,

解得 $x=7+\sqrt{33}$（舍去）或 $x=7-\sqrt{33}$，

$\therefore DM=7-\sqrt{33}$，

②当 M 在 DC 的延长线上时，同理得 $DM=7+\sqrt{33}$，



综上，DM的长是 $7-\sqrt{33}$或 $7+\sqrt{33}$．