2024年高考数学押题密卷04(新高考 新题型)

【本试卷共19小题，满分150分。考试用时120分钟】

注意事项:

1．答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（2024•吕梁模拟）已知（$z-i$）（$1+i$）＝－2（i是虚数单位），则复数z的共轭复数$\overline{z}=$（　　）

A．$-1+2i$　　B．$-1-2i$　　C．$1+2i$　　D．$1-2i$

2．（2024•武汉模拟）已知集合$A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|x^2-4x<0，x\in \mathbf{Z}\}$，则$A\cap B$＝（　　）

A．{2，3，4}　　B．{1，2}　　C．{0，1，2}　　D．{1，2，3}

3．（2024•鄠邑区三模）已知向量$\vec{a}=(2，m)$，$\vec{b}=(1，1)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|$，则$m$=（　　）

A．－3　　B．－1　　C．1　　D．3

4．（2024•安溪县校级模拟）已知正实数x，y满足$2x+y=xy$，则$2xy-2x-y$的最小值为（　　）

A．2　　B．4　　C．8　　D．9

5．（2024•平邑县校级模拟）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和为S_n，$a_1>0$，则“公比$q>0$”是“对于任意$n\in \mathbf{N}^*$，$S_n>0$”的（　　）

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

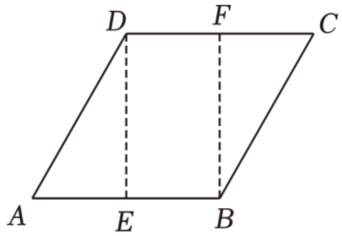
C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

6．（2024•安徽模拟）已知$a=\frac{1}{2}+2ln2$，$b=\frac{1}{3}+ln9$，$c=\frac{1}{e}+2$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$c<a<b$　　B．$c<b<a$　　C．$a<c<b$　　D．$a<b<c$

7．（2024•济南校级模拟）如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，且∠A＝60°，E，F 分别为棱 AB，DC 中点．将△BCF 和△ADE 分别沿 BF，DE 折叠，若满足 AC∥平面 $DEBF$，则线段 AC 的取值范围为（　　）



A．$[\sqrt{3}，2\sqrt{3})$　　B．$[\sqrt{3}，2\sqrt{3}]$　　C．$[2，2\sqrt{3})$　　D．$[2，2\sqrt{3}]$

8．（2024•铜川一模）古希腊哲学家、百科式科学家阿基米德最早采用分割法求得椭圆的面积为椭圆的长半轴长和短半轴长乘积的 π 倍，这种方法已具有积分计算的雏形．已知椭圆 C 的面积为 $12\sqrt{5}\pi$，离心率为$\frac{2}{3}$，F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，A 为椭圆 C 上的动点，则下列结论正确的是（　　）

①椭圆 C 的标准方程可以为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$；

②若∠$F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $S_{\triangle FAF2}=20\sqrt{3}$；

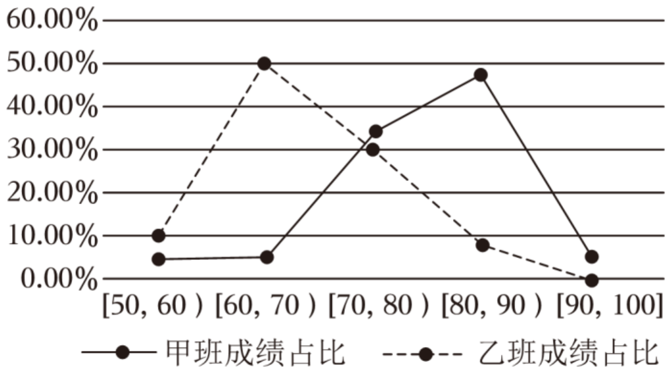
③存在点 A，使得∠$F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$；

④$\frac{2}{|AF_1|}+\frac{1}{|AF_2|}$的最小值为$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{6}$.

A．①③　　B．②④　　C．②③　　D．①④

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9．（2024•双鸭山三模）在某市初三年级举行的一次体育考试中，所有考生成绩均在[50，100]内，按照[50，60)，[60，70)，[70，80)，[80，90)，[90，100]分成五组，甲，乙两班考生的成绩占比如图所示，则下列说法错误的是（　　）



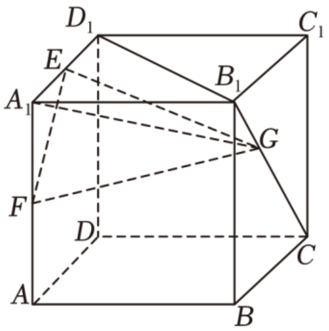
A．成绩在[70，80）的考生中，甲班人数多于乙班人数

B．甲班成绩在[80，90）内人数最多

C．乙班成绩在[70，80）内人数最多

D．甲班成绩的极差比乙班成绩的极差小

10．（2024•李沧区校级模拟）如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 A_1D_1，AA_1 的中点，G 为面对角线 B_1C 上一个动点，则（　　）



A．三棱锥 A_1-EFG 的体积为定值

B．线段 B_1C 上存在点 G，使平面 EFG∥平面 BDC_1

C．当$\vec{CG}=\frac{3}{4}\vec{CB_1}$时，直线 EG 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$

D．三棱锥 A_1-EFG 的外接球半径的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

11．（2024•江苏模拟）直线 l 与抛物线 C：$x^2=2py$（$p>0$）相交于 A，B 两点，过 A，B 两点分别作该抛物线的切线，与直线 $y=-p$ 均交于点 P，则下列选项正确的是（　　）

A．直线 l 过定点（0，p）

B．A，B 两点的纵坐标之和的最小值为 $2p$

C．存在某一条直线 l，使得∠APB 为直角

D. 设点 $Q(0,2p)$在直线 l 上的射影为 H，则直线 FH 斜率的取值范围是$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．（2024•琼山区校级一模）洛卡斯是十九世纪法国数学家，他以研究斐波那契数列而著名．洛卡斯数列就是以他的名字命名，洛卡斯数列$\{L_n\}$为：1，3，4，7，11，18，29，47，76，…，即 L_1＝1，L_2＝3，且$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n(n\in N^*)$．设数列$\{L_n\}$各项依次除以 4 所得余数形成的数列为$\{a_n\}$，则 a_{2024}＝_______．

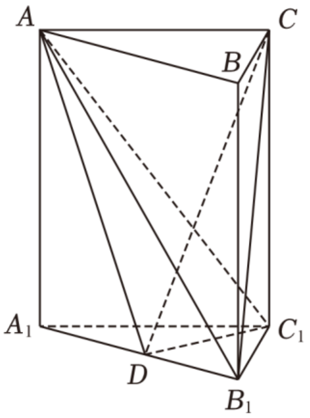
13．（2024•李沧区校级模拟）$(x+\frac{1}{x}-1)^5\cdot(x^2+1)$的展开式中的常数项为 __________．

14．（2024•玉林模拟）已知 F_1，F_2 分别是双曲线 E：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的左、右焦点，$M$ 是 E 的左支上一点，过 F_2 作∠F_1MF_2 角平分线的垂线，垂足为 N，O 为坐标原点，则$|ON|$＝_______．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）（2024•湛江二模）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，A_1C_1＝B_1C_1＝3，$A_1B_1=4\sqrt{2}$，D 为 A_1B_1 的中点．（1）证明：B_1C∥平面 AC_1D．

（2）若以 AB_1 为直径的球的表面积为 48π，求二面角 $C-AD-C_1$ 的余弦值．



16．（15 分）（2024•通州区二模）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且$\frac{cosC}{cosA}=\frac{2b-c}{a}$．

（I）求角 A 的大小；

（II）若$a=2\sqrt{3}$，b＝2，D 为 BC 边上的一点，再从下面给出的条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求△ABD 的面积．

条件①：$\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$；

条件②：∠BAD＝∠CAD．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

17．（15 分）（2024•赤峰模拟）随着中国科技的迅猛发展和进步，中国民用无人机行业

技术实力和国际竞争力不断提升，市场规模持续增长．为了适应市场需求，我国某无人机制造公司研发了一种新型民用无人机，为测试其性能，对其飞行距离与核心零件损坏数进行了统计，数据如下：

飞行距离 x（千千米）	56	63	71	79	90	102	110	117
核心零件损坏数 y（个）	61	73	90	105	119	136	149	163

（1）据关系建立 y 关于 x 的回归模型$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，求 y 关于 x 的回归方程（$\hat{b}$精确到 0.1，$\hat{a}$精确到 1）.

（2）为了检验核心零件报废是否与保养有关，该公司进行第二次测试，从所有同型号民用无人机中随机选取 100 台进行等距离测试，对其中 60 台进行测试前核心零件保养，测试结束后，有 20 台无人机核心零件报废，其中保养过的占比 30%，请根据统计数据完成 2×2 列联表，并根据最小概率值 α＝0.01 的独立性检验，能否认为核心零件的报废与保养有关？

	保养	未保养	合计
报废			﹣20
未报废			
合计	60		100

附：回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中斜率和截距的最小二乘原理估计公式$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geq k_0)$	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
k_0	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

参考数据：$\overline{x}$ =86，$\overline{y}$ =112，$\sum_{i=1}^{8} x_iy_i=82743$，$\sum_{i=8}^{8} x_i^2=62680$

18．（17 分）（2024•安庆模拟）已知函数 $f(x)=xlnx-ax$（$a\in\mathbf{R}$）在点（e，$f(e)$）处的切线平行于直线 $x-y=0$．

（1）若 $f(x)\geq mx-e^2$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（2）若 x_0 是函数 $h(x)=f(x)+x^2$ 的极值点，求证：$f(x_0)+3x_0>0$．

19．（17 分）（2024•成都三模）已知函数 $f(x)=lnx$，若数列$\{a_n\}$的各项由以下算法得

到：

①任取 $a_i=a$（其中 $a>0$），并令正整数 $i=1$；

②求函数 f（x）图象在（a_i，f（a_i））处的切线在 y 轴上的截距 a_{i+1}；

③判断 $a_{i+1}>0$ 是否成立，若成立，执行第④步；若不成立，跳至第⑤步；

④令 $i=i+1$，返回第②步；

⑤结束算法，确定数列$\{a_n\}$的项依次为 a_1，a_2，…，a_{i+1}．

根据以上信息回答下列问题：

（1）求证：$a_{i+1}=lna_i-1$；

（2）是否存在实数 a 使得$\{a_n\}$为等差数列，若存在，求出数列$\{a_n\}$的项数 n；若不存在，请说明理由．参考数据：$e^{\frac{1}{e^2+1}}\approx 3.11$．

参考答案

一．选择题（共 8 小题）

1．【答案】B

【解答】解：因为（z﹣i）（1+i）＝﹣2，

所以$z=i-\frac{2}{1+i}=i-\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-1+2i$，

所以$\overline{z}=-1$﹣$2i$．

故选：B．

2．【答案】B

【解答】解：集合 A＝{x|x^2﹣$2x$﹣3＜0}＝{x|﹣1＜x＜3}，

B＝{x|x^2﹣$4x$＜0，x∈**Z**}＝{x|0＜x＜4，x∈**Z**}＝{1，2，3}，

则 A∩B＝{1，2}．

故选：B．

3．【答案】A

【解答】解：$\vec{a}=(2，m)$，$\vec{b}=(1，1)$，

则$\vec{b}^2=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+m$，

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|$，两边同时平方可得，$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2$，即$2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=0$，

所以 2（2+m）+2＝0，解得 m＝﹣3．

故选：A．

4．【答案】C

【解答】解：因为正实数 x，y 满足 $2x+y$＝xy，所以$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，

则$2xy-2x-y=2x+y=(2x+y)(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})=4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 4+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=8$，

当且仅当 y＝$2x$ 且$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，即 x＝2，y＝4 时取等号．

故选：C．

5．【答案】A

【解答】解：若 $a_1>0$，且公比 $q>0$，则$a_n=a_1q^{n-1}>0$，

所以对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$ 成立，故充分性成立，

若 $a_1>0$，且$q=-\frac{1}{2}$，

则$S_n=\frac{a_1[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}a_1[1-(-\frac{1}{2})^n]=\frac{2}{3}a_1[1-(-1)^n\times(\frac{1}{2})^n]>0$，

所以由对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$，推不出 $q>0$，故必要性不成立；

所以“公比 $q>0$”是“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$”的充分不必要条件．

故选：A．

6．【答案】C

【解答】解：令 $f(x)=x-2lnx$，则$f'(x)=\frac{x-2}{x}$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=2$，则当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，

∴$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，

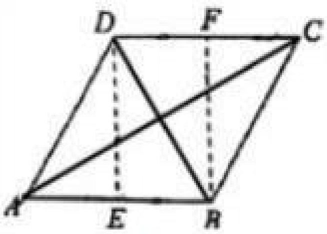
∴$f(\frac{1}{2})<f(\frac{1}{e})<f(\frac{1}{3})$，又$a=\frac{1}{2}+2ln2=\frac{1}{2}-2ln\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}-2ln\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{e}-2ln\frac{1}{e}$，

∴$a<c<b$．

故选：C．

7．【答案】A

【解答】解：如图，



折叠前

折叠前，连接 AC，BD，

由题意，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BC=2$，$\angle ABC=180°-60°=120°$，

则由余弦定理得，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BCcos\angle ABC=4+4-2\times2\times2\times(-\frac{1}{2})=12$，

所以，$AC=2\sqrt{3}$，故在折叠过程中，$AC\le2\sqrt{3}$，

折叠后，若 AC∥平面 $DEBF$，

则 $AC\not\subset$平面 $DEBF$，则$AC<2\sqrt{3}$，故 BD 项错误；

折叠前，在菱形 $ABCD$ 中，$BA=BD=2$，$\angle DAB=60°$，

则△ABD 是正三角形，

由 E，F 分别为棱 AB，DC 中点，

则 $DE\perp AB$，$BF\perp DC$，$AB/\!/DC$，所以 $DE/\!/BF$，

折叠后，$DE\perp AE$，$DE\perp EB$，$AE\cap EB=E$，又 $AE\subset$平面 EAB，且 $EB\subset$平面 EAB，

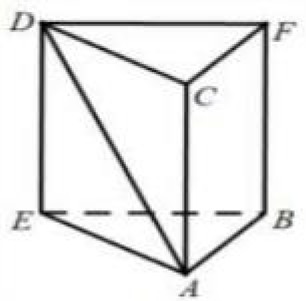
则 $DE\perp$平面 EAB，同理 $BF\perp$平面 FDC，所以平面 $EAB/\!/$平面 FDC，

则平面 EAB 与平面 FDC 的距离即为$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，

由点 $A\in$平面 EAB，点 $C\in$平面 FDC，则$AC\geq\sqrt{3}$，

在折叠过程中，当$\angle DFC=\angle AEB=60°$时，由 $AE=EB$，$DF=FC$，

则△EBA，△DFC 均为正三角形，可构成如图所示的正三棱柱 $DFC-EBA$，



折叠后

满足 $AC/\!/$平面 $DEBF$，此时$AC=DE=\sqrt{3}$，

所以 AC 最小值为$\sqrt{3}$，故 A 正确，C 项错误．

故选：A．

8．【答案】D

【解答】解：对于①：由$\begin{cases}ab=12\sqrt{5}\\ \frac{c}{a}=\frac{2}{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$a=6$，$b=2\sqrt{5}$，$c=4$，

则椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$，故①正确；

对于②：由定义可知$|AF_1|+|AF_2|=12$，由余弦定理可得

$$cos\angle F_1AF_2=\frac{|AF_1|^2+|AF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|AF_1||AF_2|}=\frac{(|AF_1|+|AF_2|)^2-2|AF_1||AF_2|-|F_1F_2|^2}{2|AF_1||AF_2|}$$

$=\frac{12^2-2|AF_1||AF_2|-64}{2|AF_1||AF_2|}=\frac{1}{2}$，解得$|AF_1||AF_2|=\frac{80}{3}$，

$S_{\triangle F_1AF_2}=\frac{1}{2}|AF_1||AF_2|sin\angle F_1AF_2=\frac{1}{2}\times\frac{80}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$，故②错误；

对于③：当点 A 为短轴的一个端点时，$\angle F_1AF_2$ 最大，

此时$cos\angle F_1AF_2=\frac{6^2+6^2-8^2}{2\times 6^2}=\frac{1}{9}>0$ $\angle F_1AF_2$为锐角，

则不存在点 A，使得$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$，故③错误；

对于④：$\frac{2}{|AF_1|}+\frac{1}{|AF_2|}=\frac{1}{12}(\frac{2}{|AF_1|}+\frac{1}{|AF_2|})(|AF_1|+|AF_2|)$

$=\frac{1}{12}(2+\frac{2|AF_2|}{|AF_1|}+1+\frac{|AF_1|}{|AF_2|})\geq\frac{1}{12}(3+2\sqrt{2})=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{6}$，当且仅当$\frac{2|AF_2|}{|AF_1|}=\frac{|AF_1|}{|AF_2|}$，

即$|AF_1|=\sqrt{2}|AF_2|$ 时，等号成立，故④正确．

故选：D．

二．多选题（共 3 小题）

9．【答案】ABD

【解答】解：由折线图得：

对于 A，成绩在[70，80）的考生中，甲班人数多于乙班人数，故 A 正确；

对于 B，甲班成绩在[80，90）内人数最多，故 B 正确；

对于 C，乙班成绩在[60，70）内人数最多，故 C 错误；

对于 D，甲班成绩的极差比乙班成绩的极差小，故 D 正确．

故选：ABD．

10．【答案】ACD

【解答】解：对 A 选项，因为平面 ADD_1A_1∥平面 BCC_1B_1，而 $B_1C\subset$平面 BCC_1B_1，故 B_1C∥平面 ADD_1A_1，

因为点 G 为面对角线 B_1C 上一个动点，故 G 点到面 ADD_1A_1 距离不变，为 2，

因为 E，F 分别为棱 A_1D_1，AA_1 的中点，故$S_{\triangle A_1EF}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$为定值，

故三棱锥$V_{G-EFA_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1EF}\times 2=\frac{1}{3}$，而三棱锥的体积$V_{A_1-EFG}=V_{G-EFA_1}$，所以 A 选项正确；

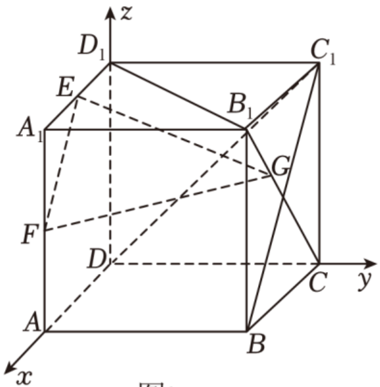


图1

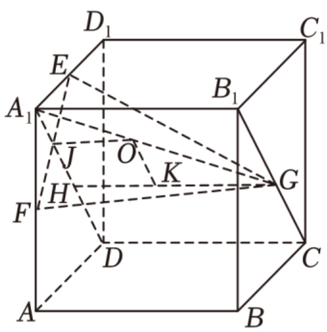


图2

对 B 选项，如图 1，以 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 B（2，2，0），D（0，0，0），C_1（0，2，2），E（1，0，2），F（2，0，1），设 G（m，2，m）（$0\le m\le 2$），

设平面 BDC_1 的法向量为$\vec{n_1}=(x_1，y_1，z_1)$，

则$\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\vec{DB}=2x_1+2y_1=0\\ \vec{n_1}\cdot\vec{DC_1}=2y_1+2z_1=0\end{cases}$，取$\vec{n_1}=(-1，1，-1)$，

设平面 EFG 的法向量为$\vec{n_2}=(x_2，y_2，z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\vec{EF}=x_2-z_2=0\\ \vec{n_2}\cdot\vec{FG}=(m-2)x_2+2y_2+(m-1)z_2=0\end{cases}$，取$\vec{n_2}=(1，\frac{3-2m}{2}，1)$，

∴平面 BDC_1 的法向量为$\vec{n_1}=(-1，1，-1)$,平面 EFG 的法向量为$\vec{n_2}=(1，\frac{3-2m}{2}，1)$，

若平面 EFG∥平面 BDC_1，则存在 k，使得$\vec{n_1}=k\vec{n_2}$，

即$(-1，1，-1)=k(1，\frac{3-2m}{2}，1)$，解得 $k=-1$，$m=\frac{5}{2}$，

因为 $0\le m\le 2$，故不合题意，

所以线段 B_1C 上不存在点 G，使平面 EFG∥平面 BDC_1，所以 B 选项错误；

对 C 选项，G（m，2，m），C（0，2，0），B_1（2，2，2），

若$\vec{CG}=\frac{3}{4}\vec{CB_1}$，即$(m，0，m)=\frac{3}{4}(2，0，2)$，解得$m=\frac{3}{2}$，

此时$G(\frac{3}{2}，2，\frac{3}{2})$，又 E（1，0，2），$\vec{EG}=(\frac{1}{2}，2，-\frac{1}{2})$，

显然平面 $ABCD$ 的一个法向量$\vec{a}=(0，0，1)$，

所以直线 EG 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为：

$|\cos<\vec{EG}，\vec{a}>|=\frac{|\vec{EG}\cdot\vec{a}|}{|\vec{EG}||\vec{a}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+4+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，所以 C 选项正确；

对 D 选项，如图 2，连接 A_1D，交 EF 于点 J，

则 J 为 EF 的中点，$A_1J=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则三棱锥 A_1-EFG 的外接球球心的投影为 J，

过点 G 作 $GH\perp A_1D$ 于点 H，则 $GH\perp$平面 ADD_1A_1，$GH=2$，

找到球心位置 O，连接 OA_1，OG，则 $OA_1=OG$ 为外接球半径，

过点 O 作 $OK\perp GH$ 于点 K，则 $OK=JH$，$OJ=HK$，设 $OK=JH=a$（$0\leq a\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}$），$OJ=HK=h$，

由勾股定理得$OA_1^2=OJ^2+A_1J^2=h^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$，

所以 $OG^2=(2-h)^2+a^2$，

所以$h^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=(2-h)^2+a^2$，解得$h=\frac{a^2+\frac{7}{2}}{4}$，

要想半径最大，则只需 h 最大，即 a^2 最大，

当$a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$时，h 最大为 2，此时半径的最大值为$\sqrt{4+\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 D 选项正确．

故选：ACD．

11．【答案】ABD

【解答】解：由题意，直线 l 的斜率一定存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

联立方程组$\begin{cases}y=kx+m\\x^2=2py\end{cases}$，可得 $x^2-2pkx-2pm=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\Delta=(-2pk)^2+4\times2pm>0$，

且 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-2pm$，

对于 A 中，由抛物线 $x^2=2py$，可得$y=\frac{1}{2p}x^2$，则$y'=\frac{x}{p}$，

所以在点 A 的切线方程为$y-y_1=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$，即$y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$，即$y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$，

同理可得：在点 B 处的切线方程为$y=\frac{x_2}{p}x-\frac{x_2^2}{2p}$，

联立方程组$\begin{cases}y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}\\y=\frac{x_2}{p}x-\frac{{x_2}^2}{2p}\end{cases}$，解得$y=\frac{x_1x_2}{2p}=\frac{-2pm}{2p}=-m$，

又因为过 A，B 两点的切线与直线 $y=-p$ 均交于点 P，所以 $-m=-p$，

即 $m=p$，所以直线 l 的方程为 $y=kx+p$，恒过定点 $(0,p)$，所以 A 正确；

对于 B 中，由$y_1+y_2=kx_1+p+kx_2+p=2p(k^2+1)\geq2p$，当且仅当 $k=0$ 时，等号成立，

即 A，B 两点的纵坐标之和的最小值为 $2p$，所以 B 正确；

对于 C 中，假设存在某一条直线 l，使得 $\angle APB$ 为直角，即 $k_{PB}\bullet k_{PA}=-1$，

可得$\frac{x_1}{p}\cdot\frac{x_2}{p}=-1$，即$x_1x_2=-p^2$，又因为$x_1x_2=-2p^2$，（此时矛盾），

所以不存在直线 l，使得 $\angle APB$ 为直角，所以 C 不正确；

对于 D 中，因为直线 $y=kx+p$，所以$k_{QH}=-\frac{1}{k}$，

则直线 QH 的方程为$y=-\frac{1}{k}x+2p$，联立方程组$\begin{cases} y=kx+p \\ y=-\frac{1}{k}x+2p \end{cases}$，

解得$x=\frac{kp}{k^2+1}$，$y=\frac{(2k^2+1)p}{k^2+1}$，即$H(\frac{kp}{k^2+1}，\frac{(2k^2+1)p}{k^2+1})$，

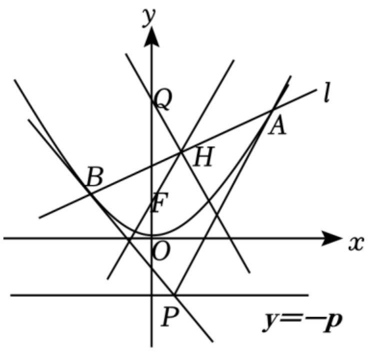
又由$F(0，\frac{p}{2})$，所以 FH 的斜率为$k_{FH}=\frac{\frac{(2k^2+1)p}{k^2+1}-\frac{p}{2}}{\frac{kp}{k^2+1}}=\frac{3k^2+1}{2k}=\frac{1}{2}(3k+\frac{1}{k})$，

当 $k>0$ 时，$3k+\frac{1}{k}\geq 2\sqrt{3k\times\frac{1}{k}}=2\sqrt{3}$，当且仅当$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立；

当 $k<0$ 时，$3k+\frac{1}{k}\leq -2\sqrt{3k\times\frac{1}{k}}=-2\sqrt{3}$，当且仅当$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立，

所以 $k_{FH}\leq-\sqrt{3}$或 $k_{FH}\geq\sqrt{3}$，即直线 FH 的斜率为$(-\infty，-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}，+\infty)$，所以 D 正确．

故选：ABD．



三．填空题（共 3 小题）

12．【答案】3．

【解答】解：数列$\{L_n\}$的各项除以 4 的余数分别为 1，3，0，3，3，2，1，3，0，…，

故可得$\{a_n\}$的周期为 6，且前 6 项分别为 1，3，0，3，3，2，

而 $a_{2024}=a_2=3$．

故答案为：3．

13．【答案】﹣81．

【解答】解：$(x+\frac{1}{x}-1)^5$ 的展开式中的各项为：$C_5^rC_{5-r}^kx^r(\frac{1}{x})^k(-1)^{5-k-r}=(-1)^{5-k-r}C_5^rC_{5-r}^kx^{r-k}$，

而$(-1)^{5-k-r}C_5^rC_{5-r}^kx^{r-k}=(-1)^{5-k-r}\times\frac{5!}{r!(5-r-k)!k!}x^{r-k}$，

其中 $r=0$，1，2，4，5，$k=0$，1，…，$5-r$，

令 $r-k=-2$，则 $\begin{cases}r=0\\k=2\end{cases}$或$\begin{cases}r=1\\k=3\end{cases}$，

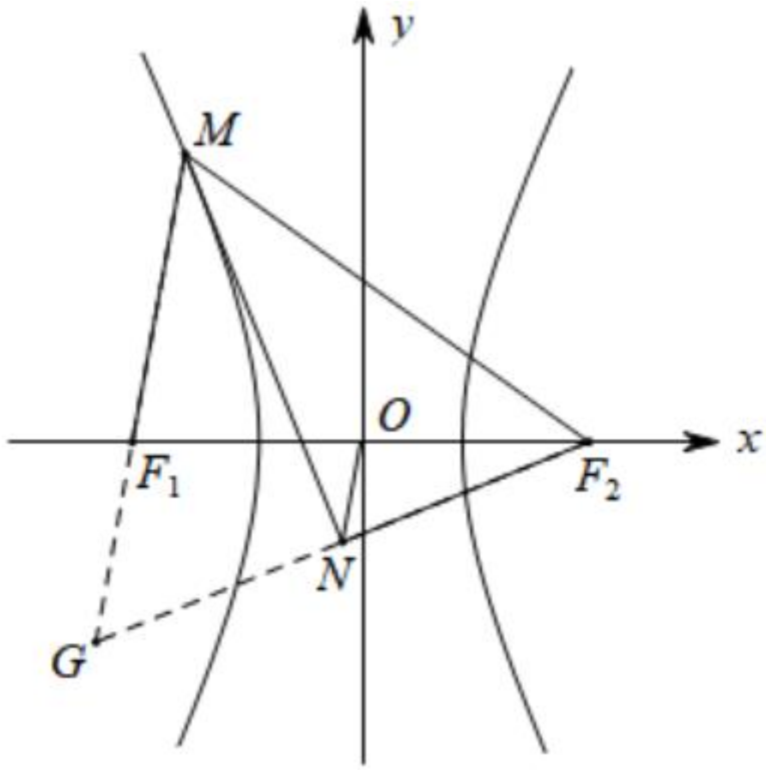
令 $r-k=0$，则 $\begin{cases}r=0\\k=0\end{cases}$或$\begin{cases}r=1\\k=1\end{cases}$或$\begin{cases}r=2\\k=2\end{cases}$.

故 $(x+\frac{1}{x}-1)^5\cdot(x^2+1)$ 展开式中的常数项为：$(-1)^{5-2-0}\times\frac{5!}{3!2!}+(-1)^{5-3-1}\times\frac{5!}{3!}+(-1)^{5-0-0}\times\frac{5!}{5!}+(-1)^{5-1-1}\times\frac{5!}{3!}+(-1)^{5-2-2}\times\frac{5!}{2!2!}=-10-20-1-20-30=-81$.

故答案为：-81．

14．【答案】2．

【解答】解：延长 MF_1，F_2N，相交于点 G，



由题意知，MN 平分$\angle F_1MF_2$，且 $MN\perp GF_2$，

所以$|MG|=|MF_2|$，且点 N 是 GF_2 的中点，

因为$|MG|=|MF_1|+|GF_1|$，

所以$|MF_2|=|MF_1|+|GF_1|$，即$|MF_2|-|MF_1|=|GF_1|$，

由双曲线的定义知，$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$，

所以$|GF_1|=4$，

又 O 是 F_1F_2 的中点，

所以$|ON|=\frac{1}{2}|GF_1|=2$.

故答案为：2.

四．解答题（共 5 小题）

15.【答案】（1）证明过程见解答；（2）$\frac{\sqrt{57}}{19}$.

【解答】解：（1）证明：连接 A_1C 交 AC_1 于点 E，则 E 为 A_1C 的中点，

因为 D 为 A_1B_1 的中点，所以 DE∥B_1C，

又因为 $DE\subset$平面 AC_1D，$B_1C\not\subset$平面 AC_1D，

所以 B_1C∥平面 AC_1D；

（2）因为 $A_1C_1=B_1C_1$，D 为 A_1B_1 的中点，所以 $C_1D\perp A_1B_1$，且$C_1D=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$.

因为以 AB_1 为直径的球的表面积为 48π，所以$4\pi\times[\frac{\sqrt{AA_1^2+(4\sqrt{2})^2}}{2}]^2=48\pi$，解得 $AA_1=4$，

以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DC_1}$的方向为 y 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，

则$D(0，0，0)$，$C_1(0，1，0)$，$A(-2\sqrt{2}，0，4)$，$C(0，1，4)$.

设平面 AC_1D 的法向量为$\vec{m}=(x，y，z)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0.1，0)$，$\overrightarrow{DA}=(-2\sqrt{2}，0，4)$，

则$\vec{m}\perp\overrightarrow{DC_1}$，$\vec{m}\perp\overrightarrow{DA}$，所以$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DA}=-2\sqrt{2}x+4z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，得$\vec{m}=(\sqrt{2}，0，1)$.

设平面 ACD 的法向量为$\vec{n}=(x'，y'，z')$，$\overrightarrow{DC}=(0，1，4)$，

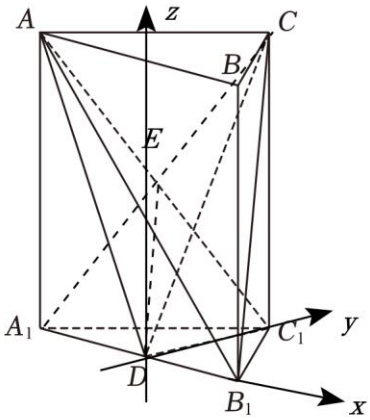
则$\vec{n}\perp\overrightarrow{DC}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{DA}$，所以$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=y'+4z'=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=-2\sqrt{2}x'+4z'=0\end{cases}$，

令 $z'=1$，得$\vec{n}=(\sqrt{2}，-4，1)$.

因为$\cos<\vec{m}，\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{57}}{19}$，

由图可知，二面角 $C-AD-C_1$ 为锐二面角，

所以二面角 $C-AD-C_1$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{57}}{19}$.



16.【答案】（I）$\frac{\pi}{3}$；

（II）选条件①：$\sqrt{3}$；

选条件②：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解答】解：（I）因为$\frac{cosC}{cosA}=\frac{2b-c}{a}$，可得$\frac{cosC}{cosA}=\frac{2sinB-sinC}{sinA}$，

整理可得 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=2\cos A\sin B$，

即 $\sin(A+C)=2\cos A\sin B$，

在三角形中，$\sin(A+C)=\sin B$，$\sin B>0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，

可得 $A=\frac{\pi}{3}$；

（II）由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $12=4+c^2-2\times2\times c\times\frac{1}{2}$，即 $c^2-2c-8=0$，

解得 $c=4$ 或 $c=-2$（舍），

若选条件①：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，可知 D 为 BC 的中点，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

因为$a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$；

若条件②：$\angle BAD=\angle CAD$，即 AD 为$\angle CAB$ 的角平分线，

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

即$\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}$，

即 $2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=AD\times（2+4）\times\frac{1}{2}$，

解得 $AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}c\bullet AD\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

17.【答案】（1）$\hat{y}=1.6x-26$；

（2）2×2 列联表见解析，认为核心零件是否报废与是否保养有关，此推断的错误概率不大于 0.01.

【解答】解：（1）已知$\overline{x}=86$，$\overline{y}=112$，$\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=82743$，$\sum_{i=8}^{8}x_i^2=62680$，

则$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{8}{x_i}^2-8\overline{x}^2}=\frac{82743-8\times86\times112}{62680-8\times86^2}\approx1.6$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx-26$.

∴y 关于 x 的线性回归方程为$\hat{y}=1.6x-26$；

（2）设 H_0：核心零件是否报废与保养无关，

由题意，保养过的共 20×30%＝6，未保养的为 20﹣6＝14，补充 2×2 列联表如下：

	保养	未保养	合计
报废	6	14	20
未报废	54	26	80
合计	60	40	100

则：$K^2=\frac{100\times(6\times26-14\times54)^2}{20\times40\times60\times80}=9.375>6.635$.

根据小概率值 α＝0.01 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为核心零件是否报废与是否保养有关，

此推断的错误概率不大于 0.01.

18.【答案】（1）（﹣∞，2]；（2）证明见解析.

【解答】解：对函数 $f（x）$求导得 $f'（x）=lnx+1-a$，

所以 $f'（e）=1+1-a=2-a=1$，

解得 $a=1$，

（1）由题意可知 $\frac{xlnx-x+e^2}{x}\geq m$对任意的 $x\in（0，+\infty）$恒成立，

即$lnx-1+\frac{e^2}{x}\geq m$ 对任意的 $x\in（0，+\infty）$恒成立，

只需$(lnx-1+\frac{e^2}{x})_{min}\geq m$，

令$g(x)=lnx-1+\frac{e^2}{x}$，$x>0$，

对其求导得$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e^2}{x^2}=\frac{x-e^2}{x^2}$，

所以当 $x\in$（0，e^2） 时，g'（x）<0，函数 g（x）单调递减；

当 $x\in$（e^2，$+\infty$） 时，g'（x）>0，函数 g（x）单调递增，

所以$g(x)_{min}=g(e^2)=2-1+1=2$，

于是 $m\leq 2$，

因此实数 m 的取值范围是（﹣∞，2].

（2）证明：由条件知 h（x）$=xlnx-x+x^2$，对其求导得 h'（x）$=lnx+2x$，

函数 h'（x）在（0，$+\infty$）上单调递增，且$h'(\frac{1}{e})=-1+\frac{2}{e}<0$，$h'(1)=2>0$，

所以存在$x_0\in(\frac{1}{e}$，1)，使 h'（x_0）$=0$，即 $lnx_0+2x_0=0$，

当 $x\in$（0，x_0） 时，h'（x）<0，函数 h（x）单调递减；

当 $x\in$（x_0，$+\infty$） 时，h'（x）>0，函数 h（x）单调递增，

于是 x_0 是函数 h（x）的极值点，

所以 f（x_0）$+3x_0=x_0lnx_0+2x_0=-2x_0^2+2x_0=2x_0(1-x_0)>0$，即得证．

19.【答案】（1）证明过程见解答；

（2）存在，数列$\{a_n\}$的项数 n 为 3．

【解答】解：（1）证明：由题得$f'(x)=\frac{1}{x}$，曲线 $y=f$（x）在点（a_i，f（a_i））处的切线方程为：

$y-f$（a_i）$=\frac{1}{a_i}$（$x-a_i$），即 $y-lna_i=\frac{x}{a_i}-1$，

令 $x=0$，得 $y=lna_i-1$，此切线交 y 轴于点（0，lna_i-1），

∴$a_{i+1}=lna_i-1$．

（2）若$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为 d，

则 $d=a_{i+1}-a_i=lna_i-a_i-1$，$1\leq i\leq n$，

令 g（x）$=lnx-x-1$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $x\in$（0，1）时，g'（x）>0，g（x）单调递增，

当 $x\in$（1，$+\infty$）时，g'（x）<0，g（x）单调递减，

∴$g(x)_{max}=g(1)=-2$，

∴$d=g(x)$最多有两个不同的根，即最多 3 项成等差数列，

若 a_1，a_2，a_3 成等差数列，即 $a_1+a_3=2a_2$，

由（1）知 $a_2=lna_1-1$，∴$a_1=e^{a_2+1}$，

∵$a_3=lna_2-1$，

记函数 $h(x)=e^{x+1}+lnx-1-2x$，则$h'(x)=e^{x+1}+\frac{1}{x}-2$，

∴当 $x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，∴$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

∵$h(\frac{1}{e^2})=e^{\frac{1}{e^2}+1}-2-1-\frac{2}{e^2}=e^{\frac{1}{e^2}+1}-3-\frac{2}{e^2}<e^{\frac{1}{e^2}+1}-3.2<0$，

∵$h(1)=e^2-3>0$，

∴存在 $x_0\in(\frac{1}{e^2},1)$，使得 $a_1+a_3=2a_2$，即$\{a_n\}$为等差数列，

此时 $a=a_1=e^{a_2+1}$，数列$\{a_n\}$的项数为 3．