

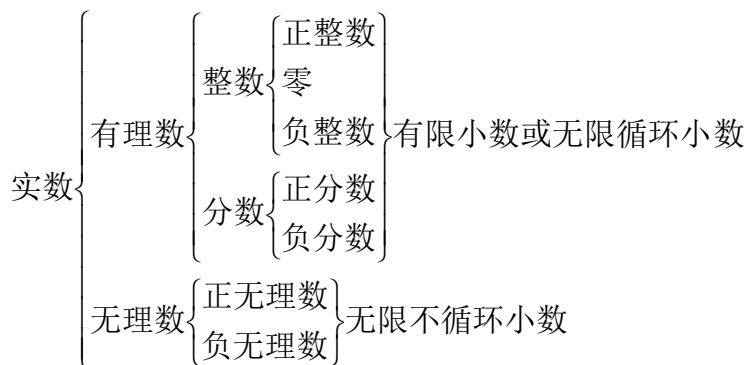
中考数学总复习资料

代数部分

第一章：实数

基础知识点：

一、实数的分类：



1、有理数：任何一个有理数总可以写成 $\frac{p}{q}$ 的形式，其中 p 、 q 是

互质的整数，这是有理数的重要特征。

2、无理数：初中遇到的无理数有三种：开不尽的方根，如 $\sqrt{2}$ 、

$\sqrt[3]{4}$ ；特定结构的无限循环小数，如 $1.101001000100001\cdots$ ；

特定意义的数，如 π 、 $\sin 45^\circ$ 等。

3、判断一个实数的数性不能仅凭表面上的感觉，往往要经过整理化简后才下结论。

二、实数中的几个概念

1、相反数：只有符号不同的两个数叫做互为相反数。

(1) 实数 a 的相反数是 $-a$ ； (2) a 和 b 互为相反数 $\Leftrightarrow a+b=0$

2、倒数：

(1) 实数 a ($a \neq 0$) 的倒数是 $\frac{1}{a}$ ； (2) a 和 b 互为倒数 $\Leftrightarrow ab=1$ ；

(3) 注意 0 没有倒数

3、绝对值：

(1) 一个数 a 的绝对值有以下三种情况：

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

(2) 实数的绝对值是一个非负数，从数轴上看，一个实数的绝对值，就是数轴上表示这个数的点到原点的距离。

(3) 去掉绝对值符号（化简）必须要对绝对值符号里面的实数进行数性（正、负）确认，再去掉绝对值符号。

4、n 次方根

(1) 平方根，算术平方根：设 $a \geq 0$ ，称 $\pm\sqrt{a}$ 叫 a 的平方根， $\sqrt{a}$ 叫 a 的算术平方根。

(2) 正数的平方根有两个，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根。

(3) 立方根： $\sqrt[3]{a}$ 叫实数 a 的立方根。

(4) 一个正数有一个正的立方根；0 的立方根是 0；一个负数有一个负的立方根。

三、实数与数轴

1、数轴：规定了原点、正方向、单位长度的直线称为数轴。原点、正方向、单位长度是数轴的三要素。

2、数轴上的点和实数的对应关系：数轴上的每一个点都表示一个实数，而每一个实数都可以用数轴上的唯一的点来表示。实数和数轴上的点是一一对应的关系。

四、实数大小的比较

1、在数轴上表示两个数，右边的数总比左边的数大。

2、正数大于 0；负数小于 0；正数大于一切负数；两个负数绝对值大的反而小。

五、实数的运算

1、加法：

(1) 同号两数相加，取原来的符号，并把它们的绝对值相加；

(2) 异号两数相加，取绝对值大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值。可使用加法交换律、结合律。

2、减法：

减去一个数等于加上这个数的相反数。

3、乘法：

(1) 两数相乘，同号取正，异号取负，并把绝对值相乘。

(2) n 个实数相乘，有一个因数为 0，积就为 0；若 n 个非 0 的实数相乘，积的符号由负因数的个数决定，当负因数有偶数个时，积为正；当负因数为奇数个时，积为负。

(3) 乘法可使用乘法交换律、乘法结合律、乘法分配律。

4、除法：

(1) 两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除。

(2) 除以一个数等于乘以这个数的倒数。

(3) 0 除以任何数都等于 0，0 不能做被除数。

5、乘方与开方：乘方与开方互为逆运算。

6、实数的运算顺序：乘方、开方为三级运算，乘、除为二级运算，加、减是一级运算，如果没有括号，在同一级运算中要从左到右依次运算，不同级的运算，先算高级的运算再算低级的运算，有括号的先算括号里的运算。无论何种运算，都要注意先定符号后运算。

六、有效数字和科学记数法

1、科学记数法：设 $N > 0$ ，则 $N = a \times 10^n$ （其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数）。

2、有效数字：一个近似数，从左边第一个不是 0 的数，到精确到的数位为止，所有的数字，叫做这个数的有效数字。精确度的形式有两种：(1) 精确到那一位；(2) 保留几个有效数字。

例题：

例 1、已知实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，且 $|a| > |b|$ 。

化简： $|a| - |a + b| - |b - a|$

分析：从数轴上 a, b 两点的位置可以看到： $a < 0, b > 0$ 且 $|a| > |b|$

所以可得：

解：原式 $= -a + a + b - b + a = a$

例 2、若 $a = (-\frac{3}{4})^{-3}$ ， $b = -(\frac{3}{4})^3$ ， $c = (\frac{3}{4})^{-3}$ ，比较 a, b, c 的大小。

分析： $a = -(\frac{4}{3})^3 < -1$ ； $b = -(\frac{3}{4})^3 > -1$ 且 $b < 0$ ； $c > 0$ ；所以容易

得出：

$$a < b < c。$$

解：略

例 3、若 $|a-2|$ 与 $|b+2|$ 互为相反数，求 $a+b$ 的值

分析：由绝对值非负特性，可知 $|a-2| \geq 0$ ， $|b+2| \geq 0$ ，又由题

$$\text{意可知： } |a-2| + |b+2| = 0$$

所以只能是： $a-2=0$ ， $b+2=0$ ，即 $a=2$ ， $b=-2$ ，所以 $a+b=0$

解：略

例 4、已知 a 与 b 互为相反数， c 与 d 互为倒数， m 的绝对值是 1，

求 $\frac{a+b}{m} - cd + m^2$ 的值。

解：原式 $= 0 - 1 + 1 = 0$

$$\text{例 5、计算：(1) } 8^{1994} \times 0.125^{1994} \quad (2) \left(\frac{e + \frac{1}{e}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e - \frac{1}{e}}{2} \right)^2$$

解：(1) 原式 $= (8 \times 0.125)^{1994} = 1^{1994} = 1$

$$(2) \text{ 原式} = \left(\frac{e + \frac{1}{e}}{2} + \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e + \frac{1}{e}}{2} - \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \right) = e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

代数部分 第二章：代数式

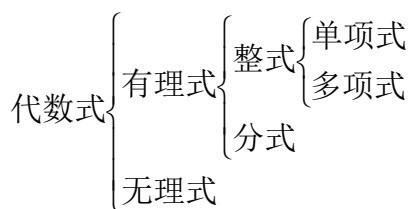
基础知识点：

一、代数式

1、代数式：用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫代数式。单独一个数或者一个字母也是代数式。

2、代数式的值：用数值代替代数里的字母，计算后得到的结果叫做代数式的值。

3、代数式的分类：



二、整式的有关概念及运算

1、概念

（1）单项式：像 x 、 7 、 $2x^2y$ ，这种数与字母的积叫做单项式。单独一个数或字母也是单项式。

单项式的次数：一个单项式中，所有字母的指数叫做这个单项式的次数。

单项式的系数：单项式中的数字因数叫单项式的系数。

（2）多项式：几个单项式的和叫做多项式。

多项式的项：多项式中每一个单项式都叫多项式的项。一个多项式含有几项，就叫几项式。

多项式的次数：多项式里，次数最高的项的次数，就是这个多项式的次数。不含字母的项叫常数项。

升（降）幂排列：把一个多项式按某一个字母的指数从小（大）到大（小）的顺序排列起来，叫做把多项式按这个字母升（降）幂排列。

（3）同类项：所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项叫做同类项。

2、运算

（1）整式的加减：

合并同类项：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母及字母的指数不变。

去括号法则：括号前面是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项都不变；括号前面是“-”号，把括号和它前面的“-”号去掉，括号里的各项都变号。

添括号法则：括号前面是“+”号，括到括号里的各项都不变；括号前面是“-”号，括到括号里的各项都变号。

整式的加减实际上就是合并同类项，在运算时，如果遇到括号，先去括号，再合并同类项。

（2）整式的乘除：

幂的运算法则：其中 m 、 n 都是正整数

同底数幂相乘： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ；同底数幂相除： $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ；

幂的乘方： $(a^m)^n = a^{mn}$ 积的乘方： $(ab)^n = a^n b^n$ 。

单项式乘以单项式：用它们系数的积作为积的系数，对于相同的字母，用它们的指数的和作为这个字母的指数；对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。

单项式乘以多项式：就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加。

多项式乘以多项式：先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。

单项除单项式：把系数，同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

多项式除以单项式：把这个多项式的每一项除以这个单项，再把所得的商相加。

乘法公式：

平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ；

完全平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

三、因式分解

1、因式分解概念：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫因式分解。

2、常用的因式分解方法：

（1）提取公因式法： $ma + mb + mc = m(a + b + c)$

（2）运用公式法：

平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ；完全平方公式：

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

（3）十字相乘法： $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

（4）分组分解法：将多项式的项适当分组后能提公因式或运用公式分解。

(5)运用求根公式法：若 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根是 x_1 、 x_2 ，则有：

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3、因式分解的一般步骤：

- (1) 如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式；
- (2) 提出公因式或无公因式可提，再考虑可否运用公式或十字相乘法；
- (3) 对二次三项式，应先尝试用十字相乘法分解，不行的再用求根公式法。
- (4) 最后考虑用分组分解法。

四、分式

1、分式定义：形如 $\frac{A}{B}$ 的式子叫分式，其中 A、B 是整式，且 B 中含有字母。

(1) 分式无意义：B=0 时，分式无意义； B≠0 时，分式有意义。

(2) 分式的值为 0：A=0，B≠0 时，分式的值等于 0。

(3) 分式的约分：把一个分式的分子与分母的公因式约去叫做分式的约分。方法是把分子、分母因式分解，再约去公因式。

(4) 最简分式：一个分式的分子与分母没有公因式时，叫做最简分式。分式运算的最终结果若是分式，一定要化为最简分式。

(5) 通分：把几个异分母的分式分别化成与原来分式相等的同分母分式的过程，叫做分式的通分。

(6) 最简公分母：各分式的分母所有因式的最高次幂的积。

(7) 有理式：整式和分式统称有理式。

2、分式的基本性质：

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} (M \text{ 是 } \neq 0 \text{ 的整式}) ; \quad (2)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M} (M \text{ 是 } \neq 0 \text{ 的整式})$$

(3) 分式的变号法则：分式的分子，分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变。

3、分式的运算：

(1) 加、减：同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减；

异分母的分式相加减，先把它们通分成同分母的分式再相加减。

（2）乘：先对各分式的分子、分母因式分解，约分后再分子乘以分子，分母乘以分母。

（3）除：除以一个分式等于乘上它的倒数式。

（4）乘方：分式的乘方就是把分子、分母分别乘方。

五、二次根式

1、二次根式的概念：式子 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 叫做二次根式。

（1）最简二次根式：被开方数的因数是整数，因式是整式，被开方数中不含能开得尽方的因式的二次根式叫最简二次根式。

（2）同类二次根式：化为最简二次根式之后，被开方数相同的二次根式，叫做同类二次根式。

（3）分母有理化：把分母中的根号化去叫做分母有理化。

（4）有理化因式：把两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个代数式互为有理化因式（常用的有理化因式有： $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ ； $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ ）

2、二次根式的性质：

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0); (2) \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}; (3)$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0); (4) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

3、运算：

（1）二次根式的加减：将各二次根式化为最简二次根式后，合并同类二次根式。

（2）二次根式的乘法： $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$ 。

（3）二次根式的除法： $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$

二次根式运算的最终结果如果是根式，要化成最简二次根式。

例题：

一、因式分解：

1、提公因式法：

例 1、 $24a^2(x-y)+6b^2(y-x)$

分析：先提公因式，后用平方差公式

解：略

[规律总结]因式分解本着先提取，后公式等，但应把第一个因式都分解到不能再分解为止，往往需要对分解后的每一个因式进行最后的审查，如果还能分解，应继续分解。

2、十字相乘法：

例 2、(1) x^4-5x^2-36 ；(2) $(x+y)^2-4(x+y)-12$

分析：可看成是 x^2 和 $(x+y)$ 的二次三项式，先用十字相乘法，初步分解。

解：略

[规律总结]应用十字相乘法时，注意某一项可是单项的一字母，也可是某个多项式或整式，有时还需要连续用十字相乘法。

3、分组分解法：

例 3、 x^3+2x^2-x-2

分析：先分组，第一项和第二项一组，第三、第四项一组，后提取，再公式。

解：略

[规律总结]对多项式适当分组转化成基本方法因式分组，分组的目的是为了用提公因式，十字相乘法或公式法解题。

4、求根公式法：

例 4、 x^2+5x+5

解：略

二、式的运算

巧用公式

例 5、计算： $(1-\frac{1}{a-b})^2-(1+\frac{1}{a-b})^2$

分析：运用平方差公式因式分解，使分式运算简单化。

解：略

[规律总结]抓住三个乘法公式的特征，灵活运用，特别要掌

握公式的几种变形，公式的逆用，掌握运用公式的技巧，使运算简便准确。

2、化简求值：

例 6、先化简，再求值： $5x^2 - (3x^2 + 5x^2) + (4y^2 + 7xy)$ ，其

中 $x = -1$ $y = 1 - \sqrt{2}$

解：略

[规律总结]一定要先化到最简再代入求值，注意去括号的法则。

3、分式的计算：

例 7、化简 $\frac{a-5}{2a-6} \div (\frac{16}{a-3} - a - 3)$

分析： $-a-3$ 可看成 $-\frac{a^2-9}{a-3}$

解：略

[规律总结]分式计算过程中：（1）除法转化为乘法时，要倒转分子、分母；（2）注意负号

4、根式计算

例 8、已知最简二次根式 $\sqrt{2b+1}$ 和 $\sqrt{7-b}$ 是同类二次根式，求 b 的值。

分析：根据同类二次根式定义可得： $2b+1=7-b$ 。

解：略

[规律总结]二次根式的性质和运算是中考必考内容，特别是二次根式的化简、求值及性质的运用是中考的主要考查内容。

代数部分

第三章：方程和方程组

基础知识点：

一、方程有关概念

1、方程：含有未知数的等式叫做方程。

2、方程的解：使方程左右两边的值相等的未知数的值叫方程的解，含有一个未知数的方程的解也叫做方程的根。

3、解方程：求方程的解或判断方程无解的过程叫做解方程。

4、方程的增根：在方程变形时，产生的不适合原方程的根叫做原方程的增根。

二、一元方程

1、一元一次方程

(1) 一元一次方程的标准形式： $ax+b=0$ （其中 x 是未知数， a 、 b 是已知数， $a \neq 0$ ）

(2) 一元一次方程的最简形式： $ax=b$ （其中 x 是未知数， a 、 b 是已知数， $a \neq 0$ ）

(3) 解一元一次方程的一般步骤：去分母、去括号、移项、合并同类项和系数化为 1。

(4) 一元一次方程有唯一的一个解。

2、一元二次方程

(1) 一元二次方程的一般形式： $ax^2+bx+c=0$ （其中 x 是未知数， a 、 b 、 c 是已知数， $a \neq 0$ ）

(2) 一元二次方程的解法：直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法

(3) 一元二次方程解法的选择顺序是：先特殊后一般，如果没有要求，一般不用配方法。

(4) 一元二次方程的根的判别式： $\Delta=b^2-4ac$

当 $\Delta > 0$ 时 $\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta = 0$ 时 $\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta < 0$ 时 $\Leftrightarrow$ 方程没有实数根，无解；

当 $\Delta \geq 0$ 时 $\Leftrightarrow$ 方程有两个实数根

(5) 一元二次方程根与系数的关系：

若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，那么：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

(6) 以两个数 x_1, x_2 为根的一元二次方程（二次项系数为 1）

是： $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

三、分式方程

(1) 定义：分母中含有未知数的方程叫做分式方程。

(2) 分式方程的解法：

一般解法：去分母法，方程两边都乘以最简公分母。

特殊方法：换元法。

（3）检验方法：一般把求得的未知数的值代入最简公分母，使最简公分母不为 0 的就是原方程的根；使得最简公分母为 0 的就是原方程的增根，增根必须舍去，也可以把求得的未知数的值代入原方程检验。

四、方程组

1、方程组的解：方程组中各方程的公共解叫做方程组的解。

2、解方程组：求方程组的解或判断方程组无解的过程叫做解方程组

3、一次方程组：

（1）二元一次方程组：

$$\text{一般形式：} \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \text{ 不全为 } 0)$$

解法：代入消元法和加减消元法

解的个数：有唯一的解，或无解，当两个方程相同时有无数解。

（2）三元一次方程组：

解法：代入消元法和加减消元法

4、二元二次方程组：

（1）定义：由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组以及由两个二元二次方程组成的方程组叫做二元二次方程组。

（2）解法：消元，转化为解一元二次方程，或者降次，转化为二元一次方程组。

考点与命题趋向分析

例题：

一、一元二次方程的解法

例 1、解下列方程：

$$(1) \quad \frac{1}{2}(x+3)^2 = 2 ; \quad (2) \quad 2x^2 + 3x = 1 ; \quad (3)$$

$$4(x+3)^2 = 25(x-2)^2$$

分析：（1）用直接开方法解；（2）用公式法；（3）用因式分解法解：略

[规律总结]如果一元二次方程形如 $(x+m)^2 = n(n \geq 0)$ ，就可以用直接开方法来解；利用公式法可以解任何一个有解的一元二次方程，运用公式法解一元二次方程时，一定要把方程化成一般形式。

例 2、解下列方程：

$$(1) x^2 - a(3x - 2a + b) = 0 (x \text{ 为未知数}) ; (2) x^2 + 2ax - 8a^2 = 0$$

分析：(1) 先化为一般形式，再用公式法解；(2) 直接可以十字相乘法因式分解后可求解。

解：略

[规律总结]对于带字母系数的方程解法和一般的方程没有什么区别，在用公式法时要注意判断 Δ 的正负。

二、分式方程的解法：

例 3、解下列方程：

$$(2) \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x+1} - 1 ; (2) \frac{x^2+2}{x} + \frac{6x}{x^2+2} = 5$$

分析：(1) 用去分母的方法；(2) 用换元法

解：略

[规律总结]一般的分式方程用去分母法来解，一些具有特殊关系如：有平方关系，倒数关系等的分式方程，可采用换元法来解。

三、根的判别式及根与系数的关系

例 4、已知关于 x 的方程： $(p-1)x^2 + 2px + p+3 = 0$ 有两个相等的实数根，求 p 的值。

分析：由题意可得 $\Delta = 0$ ，把各系数代入 $\Delta = 0$ 中就可求出 p ，但要先化为一般形式。

解：略

[规律总结]对于根的判别式的三种情况要很熟练，还有要特别注意二次项系数不能为 0

例 5、已知 a 、 b 是方程 $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的两个根，求下列各式的值：

$$(1) a^2 + b^2 ; (2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

分析：先算出 $a+b$ 和 ab 的值，再代入把 (1) (2) 变形后的式子就可求出解。

[规律总结]此类题目都是先算出两根之和和两根之积，再把要求的式子变形成含有两根之和和两根之积的形式，再代入计算。但要注意检验一下方程是否有解。

例 6、求作一个一元二次方程，使它的两个根分别比方程 $x^2 - x - 5 = 0$ 的两个根小 3

分析：先求出原方程的两根之和 $x_1 + x_2$ 和两根之积 $x_1 x_2$ 再代入求出 $(x_1 - 3) + (x_2 - 2)$ 和 $(x_1 - 3)(x_2 - 3)$ 的值，所求的方程也就容易写出来。

解：略

[规律总结]此类题目可以先解出第一方程的两个解，但有时这样又太复杂，用根与系数的关系就比较简单。

三、方程组

例 7、解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} ; \quad (2) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y - z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

分析：(1) 用加减消元法消 x 较简单；(2) 应该先用加减消元法消去 y ，变成二元一次方程组，较易求解。

解：略

[规律总结]加减消元法是最常用的消元方法，消元时那个未知数的系数最简单就先消那个未知数。

例 8、解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} ; \quad (2) \begin{cases} 3x^2 - xy - 4y^2 - 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

分析：(1) 可用代入消元法，也可用根与系数的关系来求解；(2) 要先把第一个方程因式分解化成两个二元一次方程，再与第二个方程分别组成两个方程组来解。

解：略

[规律总结]对于一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组一般用代入消元法，对于两个二元二次方程组成的方程组，一定要先把其中一个方程因式分解化为两个一次方程再和第二个方程组成两个方程组来求解。

代数部分

第四章：列方程（组）解应用题

知识点：

一、列方程（组）解应用题的一般步骤

- 1、审题；
- 2、设未知数；
- 3、找出相等关系，列方程（组）；
- 4、解方程（组）；
- 5、检验，作答；

二、列方程（组）解应用题常见类型题及其等量关系：

1、工程问题

（1）基本工作量的关系：工作量=工作效率×工作时间

（2）常见的等量关系：甲的工作量+乙的工作量=甲、乙合作的工作总量

（3）注意：工程问题常把总工程看作“1”，水池注水问题属于工程问题

2、行程问题

（1）基本量之间的关系：路程=速度×时间

（2）常见等量关系：

相遇问题：甲走的路程+乙走的路程=全程

追及问题（设甲速度快）：

同时不同地：甲的时间=乙的时间；甲走的路程 - 乙走的路程 = 原来甲、乙相距路程

同地不同时：甲的时间=乙的时间 - 时间差；甲的路程=乙的路程

3、水中航行问题：

顺流速度=船在静水中的速度+水流速度；

逆流速度=船在静水中的速度 - 水流速度

4、增长率问题：

常见等量关系：增长后的量=原来的量+增长的量；增长的量=原来的量×（1+增长率）；

5、数字问题：

基本量之间的关系：三位数=个位上的数+十位上的数×10+百位上的数×100

三、列方程解应用题的常用方法

1、译式法：就是将题目中的关键性语言或数量及各数量间的关系译成代数式，然后根据代数之间的内在联系找出等量关系。

2、线示法：就是用同一直线上的线段表示应用题中的数量关系，然后根据线段长度的内在联系，找出等量关系。

3、列表法：就是把已知条件和所求的未知量纳入表格，从而找出各种量之间的关系。

4、图示法：就是利用图表示题中的数量关系，它可以使量与量之间的关系更为直观，这种方法能帮助我们更好地理解题意。

例题：

例 1、甲、乙两组工人合作完成一项工程，合作 5 天后，甲组另有任务，由乙组再单独工作 1 天就可完成，若单独完成这项工程乙组比甲组多用 2 天，求甲、乙两组单独完成这项工程各需几天？

分析：设工作总量为 1，设甲组单独完成工程需要 x 天，则乙组完成工程需要 $(x+2)$ 天，等量关系是甲组 5 天的工作量+乙组 6 天的工作量=工作总量

解：略

例 2、某部队奉命派甲连跑步前往 90 千米外的 A 地，1 小时 45 分后，因任务需要，又增派乙连乘车前往支援，已知乙连比甲连每小时快 28 千米，恰好在全程的 $\frac{1}{3}$ 处追上甲连。求乙连的行进速度及追上甲连的时间

分析：设乙连的速度为 v 千米/小时，追上甲连的时间为 t 小时，则甲连的速度为 $(v - 28)$ 千米/小时，这时乙连行了 $(t + \frac{7}{4})$ 小时，其等量关系为：甲走的路程=乙走的路程=30

解：略

例 3、某工厂原计划在规定期限内生产通讯设备 60 台支援抗洪，由于改进了操作技术；每天生产的台数比原计划多 50%，结果提前 2 天完成任务，求改进操作技术后每天生产通讯设备多少台？

分析：设原计划每天生产通讯设备 x 台，则改进操作技术后每天生产 $x(1+0.5)$ 台，等量关系为：原计划所用时间 - 改进技术后所用时间=2 天

解：略

例 4、某商厦今年一月份销售额为 60 万元，二月份由于种种

原因，经营不善，销售额下降 10%，以后经加强管理，又使月销售额上升，到四月份销售额增加到 96 万元，求三、四月份平均每月增长的百分率是多少？

分析：设三、四月份平均每月增长率为 $x\%$ ，二月份的销售额为 $60(1 - 10\%)$ 万元，三月份的销售额为二月份的 $(1+x)$ 倍，四月份的销售额又是三月份的 $(1+x)$ 倍，所以四月份的销售额为二月份的 $(1+x)^2$ 倍，等量关系为：四月份销售额为 96 万元。

解：略

例 5、一年期定期储蓄年利率为 2.25%，所得利息要交纳 20% 的利息税，例如存入一年期 100 元，到期储户纳税后所得到利息的计算公式为：

$$\text{税 后 利 息} = 100 \times 2.25\% - 100 \times 2.25\% \times 20\% = 100 \times 2.25\%(1 - 20\%)$$

已知某储户存下一笔一年期定期储蓄到期纳税后得到利息是 450 元，问该储户存入了多少本金？

分析：设存入 x 元本金，则一年期定期储蓄到期纳税后利息为 $2.25\%(1-20\%)x$ 元，方程容易得出。

例 6、某商场销售一批名牌衬衫，平均每天售出 20 件，每件盈利 40 元，为了扩大销售，增加盈利，减少库存，商场决定采取适当的降低成措施，经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 2 件。若商场平均每天要盈利 1200 元，每件衬衫应降价多少元？

分析：设每件衬衫应该降价 x 元，则每件衬衫的利润为 $(40-x)$ 元，平均每天的销售量为 $(20+2x)$ 件，由关系式：总利润=每件的利润 $\times$ 售出商品的叫量，可列出方程

解：略

代数部分

第五章：不等式及不等式组

知识点：

一、不等式与不等式的性质

1、不等式：表示不等关系的式子。（表示不等关系的常用符号： $\neq$ ， $<$ ， $>$ ）。

2、不等式的性质：

（1）不等式的两边都加上（或减去）同一个数，不等号方向

不改变，如 $a > b$ ， c 为实数 $\Rightarrow a + c > b + c$

(2) 不等式两边都乘以（或除以）同一个正数，不等号方向不变，如 $a > b$ ， $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ 。

(3) 不等式两边都乘以（或除以）同一个负数，不等号方向改变，如 $a > b$ ， $c < 0 \Rightarrow ac < bc$ 。

注：在不等式的两边都乘以（或除以）一个实数时，一定要养成好的习惯、就是先确定该数的数性（正数，零，负数）再确定不等号方向是否改变，不能像应用等式的性质那样随便，以防出错。

3、任意两个实数 a ， b 的大小关系（三种）：

$$(1) a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

$$(2) a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$(3) a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

$$4、(1) a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

$$(2) a > b > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

二、不等式（组）的解、解集、解不等式

1、能使一个不等式（组）成立的未知数的一个值叫做这个不等式（组）的一个解。

不等式的所有解的集合，叫做这个不等式的解集。

不等式组中各个不等式的解集的公共部分叫做不等式组的解集。

2. 求不等式（组）的解集的过程叫做解不等式（组）。

三、不等式（组）的类型及解法

1、一元一次不等式：

(1) 概念：含有一个未知数并且含未知数的项的次数是一次的的不等式，叫做一元一次不等式。

(2) 解法：与解一元一次方程类似，但要特别注意当不等式的两边同乘以（或除以）一个负数时，不等号方向要改变。

2、一元一次不等式组：

(1) 概念：含有相同未知数的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组。

(2) 解法：先求出各不等式的解集，再确定解集的公共部分。

注：求不等式组的解集一般借助数轴求解较方便。

例题：

方法 1：利用不等式的基本性质

1、判断正误：

(1) 若 $a > b$, c 为实数, 则 $ac^2 > bc^2$;

(2) 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$

分析：在(1)中, 若 $c=0$, 则 $ac^2 = bc^2$; 在(2)中, 因为“ $>$ ”, 所以 $c \neq 0$, 否则应有 $ac^2 = bc^2$ 故 $a > b$

解：略

[规律总结] 将不等式正确变形的关键是牢记不等式的三条基本性质, 不等式的两边都乘以或除以含有字母的式子时, 要对字母进行讨论。

方法 2: 特殊值法

例 2、若 $a < b < 0$, 那么下列各式成立的是 ()

A、 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B、 $ab < 0$ C、 $\frac{a}{b} < 1$ D、 $\frac{a}{b} > 1$

分析：使用直接解法解答常常费时间, 又因为答案在一般情况下成立, 当然特殊情况也成立, 因此采用特殊值法。

解：根据 $a < b < 0$ 的条件, 可取 $a = -2$, $b = -1$, 代入检验, 易知 $\frac{a}{b} > 1$, 所以选 D

[规律总结] 此种方法常用于解选择题, 学生知识有限, 不能直接解答时使用特殊值法, 既快, 又能找到符合条件的答案。

方法 3: 类比法

例 3、解下列一元一次不等式, 并把解集在数轴上表示出来。

(1) $8 - 2(x+2) < 4x - 2$; (2) $1 - \frac{x-1}{2} \geq 2 - \frac{x-1}{3}$

分析：解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程类似, 主要步骤有去分母, 去括号、移项、合并同类项, 把系数化成 1, 需要注意的是, 不等式的两边同时乘以或除以同一个负数, 不等号要改变方向。

解：略

[规律总结] 解一元一次不等式与解一元一次方程的步骤类似, 但要注意当不等式的两边都乘以或除以同一个负数时, 不等号的方向必须改变, 类比法解题, 使学生容易理解新知识和掌握新知识。

方法 4：数形结合法

例 4、求不等式组：
$$\begin{cases} 2(x+8) \leq 10-4(x-3) \\ \frac{x+1}{2} - \frac{6x+7}{3} < 1 \end{cases}$$
 的非负整数解

分析：要求一个不等式组的非负整数解，就先求出不等式组的解集，再从解集中找出其中的非负整数解。

解：略

方法 5：逆向思考法

例 5、已知关于 x 的不等式 $(a-2)x > 10-a$ 的解集是 $x > 3$ ，求 a 的值。

分析：因为关于 x 的不等式的解集为 $x > 3$ ，与原不等式的不等号同向，所以有 $a-2 > 0$ ，即原不等式的解集为 $x > \frac{10-a}{a-2}$ ，

$\frac{10-a}{a-2} = 3$ 解此方程求出 a 的值。

解：略

[规律总结]此题先解字母不等式，后着眼已知的解集，探求成立的条件，此种类型题都采用逆向思考法来解。

代数部分

第六章：函数及其图像

知识点：

一、平面直角坐标系

1、平面内有公共原点且互相垂直的两条数轴，构成平面直角坐标系。在平面直角坐标系内的点和有序实数对之间建立了一一对应的关系。

2、不同位置点的坐标的特征：

(1) 各象限内点的坐标有如下特征：

点 $P(x, y)$ 在第一象限 $\Leftrightarrow x > 0, y > 0$ ；

点 $P(x, y)$ 在第二象限 $\Leftrightarrow x < 0, y > 0$ ；

点 $P(x, y)$ 在第三象限 $\Leftrightarrow x < 0, y < 0$ ；

点 $P(x, y)$ 在第四象限 $\Leftrightarrow x > 0, y < 0$ 。

(2) 坐标轴上的点有如下特征：

点 $P(x, y)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow y$ 为 0, x 为任意实数。

点 $P(x, y)$ 在 y 轴上 $\Leftrightarrow x$ 为 0, y 为任意实数。

3. 点 $P(x, y)$ 坐标的几何意义：

(1) 点 $P(x, y)$ 到 x 轴的距离是 $|y|$ ；

(2) 点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离是 $|x|$ ；

(3) 点 $P(x, y)$ 到原点的距离是 $\sqrt{x^2 + y^2}$

4. 关于坐标轴、原点对称的点的坐标的特征：

(1) 点 $P(a, b)$ 关于 x 轴的对称点是 $P_1(a, -b)$ ；

(2) 点 $P(a, b)$ 关于 y 轴的对称点是 $P_2(-a, b)$ ；

(3) 点 $P(a, b)$ 关于原点的对称点是 $P_3(-a, -b)$ ；

二、函数的概念

1、常量和变量：在某一变化过程中可以取不同数值的量叫做变量；保持数值不变的量叫做常量。

2、函数：一般地，设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y ，如果对于 x 的每一个值， y 都有唯一的值与它对应，那么就说 x 是自变量， y 是 x 的函数。

(1) 自变量取值范围的确是：

①解析式是只含有一个自变量的整式的函数，自变量取值范围是全体实数。

②解析式是只含有一个自变量的分式的函数，自变量取值范围是使分母不为 0 的实数。

③解析式是只含有一个自变量的偶次根式的函数，自变量取值范围是使被开方数非负的实数。

注意：在确定函数中自变量的取值范围时，如果遇到实际问题，还必须使实际问题有意义。

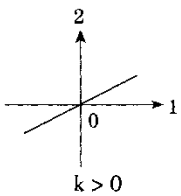
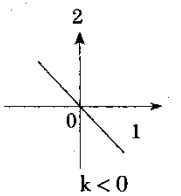
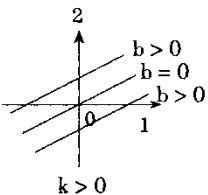
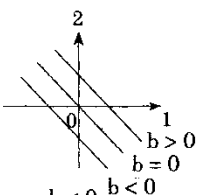
(2) 函数值：给自变量在取值范围内的一个值所求得的函数的对应值。

(3) 函数的表示方法：①解析法；②列表法；③图像法

(4) 由函数的解析式作函数的图像，一般步骤是：①列表；②描点；③连线

三、几种特殊的函数

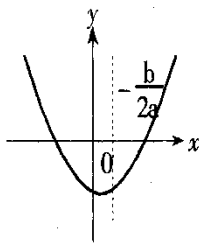
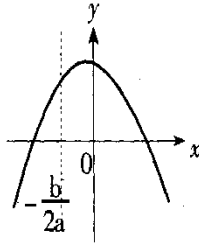
1、一次函数

函数	解析式	自变量的取值范围	图像		性质
正比例函数	$y = kx$ ($k \neq 0$)	全体实数			① 当 $k > 0$ 时 y 随 x 的增大而增大 ② 当 $k < 0$ 时 y 随 x 的增大而减小
一次函数	$y = kx + b$ ($k \neq 0$)	全体实数			

直线位置与 k , b 的关系:

- (1) $k > 0$ 直线向上的方向与 x 轴的正方向所形成的夹角为锐角;
- (2) $k < 0$ 直线向上的方向与 x 轴的正方向所形成的夹角为钝角;
- (3) $b > 0$ 直线与 y 轴交点在 x 轴的上方;
- (4) $b = 0$ 直线过原点;
- (5) $b < 0$ 直线与 y 轴交点在 x 轴的下方;

2、二次函数

函数	解析式	自变量的取值范围	图像(抛物线)	
二次函数	(1)一般式: $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (2)顶点式: $y = a(x - m)^2 + n$ 顶点为 (m, n) (3)两根式: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 与 x 轴两交点: $(x_1, 0)(x_2, 0)$	全体实数	 $a > 0$ $-\frac{b}{2a} > 0$	 $a < 0$ $-\frac{b}{2a} < 0$

抛物线位置与 a, b, c 的关系:

(1) a 决定抛物线的开口方向 $\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow \text{开口向上} \\ a < 0 \Leftrightarrow \text{开口向下} \end{cases}$

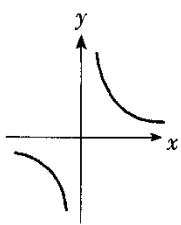
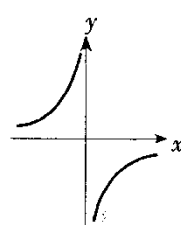
(2) c 决定抛物线与 y 轴交点的位置:

$c > 0 \Leftrightarrow$ 图像与 y 轴交点在 x 轴上方; $c = 0 \Leftrightarrow$ 图像过原点; $c < 0$

$\Leftrightarrow$ 图像与 y 轴交点在 x 轴下方;

(3) a, b 决定抛物线对称轴的位置: a, b 同号, 对称轴在 y 轴左侧; $b = 0$, 对称轴是 y 轴; a, b 异号. 对称轴在 y 轴右侧;

3、反比例函数:

函数	解析式	自变量的取值范围	图像(双曲线)		性质
反比例函数	$y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)	$x \neq 0$ 的实数	 $k > 0$	 $k < 0$	① $k > 0$ 时, 图像的两个分支分别在一、三象限, 在每个象限内, y 随 x 的增大而小; ② $k < 0$ 时, 图像的两个分支分别在二、四象限, 在每个象限内, y 随 x 的增大而大

4、正比例函数与反比例函数的对照表:

函 数	正比例函数	反比例函数
解析式	$y = kx (k \neq 0)$	$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$
图像	直线, 经过原点	双曲线, 与坐标轴没有交点
自变量取值范围	全体实数	$x \neq 0$ 的一切实数
图像的位置	当 $k > 0$ 时, 在一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 在二、四象限。	当 $k > 0$ 时, 在一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 在二、四象限。
性 质	当 $k > 0$ 时, y 随 x 增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小。	当 $k > 0$ 时, y 随 x 增大而减小; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 增大而增大。

例题:

例1、正比例函数图象与反比例函数图象都经过点P (m, 4),
已知点P到x轴的距离是到y轴的距离2倍。

(1)求点P的坐标.;

(2)求正比例函数、反比例函数的解析式。

分析: 由点P 到 x 轴的距离是到 y 轴的距离 2 倍可知: $2|m|=4$,
易求出点 P 的坐标, 再利用待定系数法可求出这正、反比例函数的解析式。

解: 略

例 2、已知 a, b 是常数, 且 $y+b$ 与 $x+a$ 成正比例. 求证: y 是 x 的一次函数。

分析: 应写出 $y+b$ 与 $x+a$ 成正比例的表达式, 然后判断所得结果是否符合一次函数定义。

证明: 由已知, 有 $y+b=k(x+a)$, 其中 $k \neq 0$ 。

整理, 得 $y=kx+(ka-b)$. ①

因为 $k \neq 0$ 且 $ka-b$ 是常数, 故 $y=kx+(ka-b)$ 是 x 的一次函数式。

例 3、填空: 如果直线方程 $ax+by+c=0$ 中, $a < 0$, $b < 0$ 且 $bc < 0$, 则此直线经过第_____象限。

分析: 先把 $ax+by+c=0$ 化为 $-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. 因为 $a < 0$, $b < 0$, 所以 $\frac{a}{b} > 0, -\frac{a}{b} < 0$, 又 $bc < 0$, 即 $\frac{c}{b} < 0$, 故 $-\frac{c}{b} > 0$. 相当于在一次函数 $y=kx+l$ 中, $k=-\frac{a}{b} < 0$, $l=-\frac{c}{b} > 0$, 此直线与 y 轴的交点 $(0, -\frac{c}{b})$ 在 x 轴上方. 且此直线的向上方向与 x 轴正方向所成角是钝角, 所以此直线过第一、二、四象限。

例 4、把反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 与二次函数 $y = kx^2$ ($k \neq 0$) 画在同一个坐标系里，正确的是()。

答：选(D)。这两个函数式中的 k 的正、负号应相同(图 13-110)。

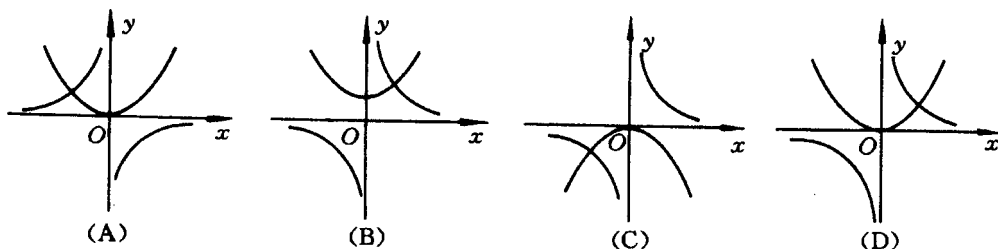


图 13-110

例 5、画出二次函数 $y = x^2 - 6x + 7$ 的图象，根据图象回答下列问题：

- (1) 当 $x = -1, 1, 3$ 时 y 的值是多少？
- (2) 当 $y = 2$ 时，对应的 x 值是多少？
- (3) 当 $x > 3$ 时，随 x 值的增大 y 的值怎样变化？
- (4) 当 x 的值由 3 增加 1 时，对应的 y 值增加多少？

分析：要画出这个二次函数的图象，首先用配方法把 $y = x^2 - 6x + 7$ 变形为 $y = (x - 3)^2 - 2$ ，确定抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标，然后列表、描点、画图。

解：图象略。

例 6、拖拉机开始工作时，油箱有油 45 升，如果每小时耗油 6 升。

(1) 求油箱中的余油量 Q (升) 与工作时间 t (时) 之间的函数关系式；

(2) 画出函数的图象。

答：(1) $Q = 45 - 6t$ 。

(2) 图象略。注意：这是实际问题，图象只能由自变量 t 的取值范围 $0 \leq t \leq 7.5$ 决定是一条线段，而不是直线。

代数部分 第七章：统计初步

知识点：

一、总体和样本：

在统计时，我们把所要考察的对象的全体叫做总体，其中每

一考察对象叫做个体。从总体中抽取的一部分个体叫做总体的一个样本，样本中个体的数目叫做样本容量。

二、反映数据集中趋势的特征数

1、平均数

(1) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的平均数, $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

(2) 加权平均数: 如果 n 个数据中, x_1 出现 f_1 次, x_2 出现 f_2

次, $\dots, x_k$ 出现 f_k 次 (这里 $f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$), 则

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k)$$

(3) 平均数的简化计算:

当一组数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中各数据的数值较大, 并且都与常

数 a 接近时, 设 $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \dots, x_n - a$ 的平均数为 $\bar{x}'$ 则:

$$\bar{x} = \bar{x}' + a。$$

2、中位数: 将一组数据按从小到大的顺序排列, 处在最中间位置上的数据叫做这组数据的中位数, 如果数据的个数为偶数中位数就是处在中间位置上两个数据的平均数。

3、众数: 在一组数据中, 出现次数最多的数据叫做这组数据的众数。一组数据的众数可能不止一个。

三、反映数据波动大小的特征数:

1、方差:

(1) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的 方 差 ,

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$(2) \text{ 简 化 计 算 公 式 : } S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 为较小的整数时用这个公式要比较方便)

(3) 记 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的方差为 S^2 ，设 a 为常数， $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \dots, x_n - a$ 的方差为 S'^2 ，则 $S^2 = S'^2$ 。

注：当 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 各数据较大而常数 a 较接近时，用该法计算方差较简便。

2、标准差：方差 (S^2) 的算术平方根叫做标准差 (S)。

注：通常由方差求标准差。

四、频率分布

1、有关概念

(1) 分组：将一组数据按照统一的标准分成若干组称为分组，当数据在 100 个以内时，通常分成 5—12 组。

(2) 频数：每个小组内的数据的个数叫做该组的频数。各个小组的频数之和等于数据总数 n 。

(3) 频率：每个小组的频数与数据总数 n 的比值叫做这一小组的频率，各小组频率之和为 1。

(4) 频率分布表：将一组数据的分组及各组相应的频数、频率所列成的表格叫做频率分布表。

(5) 频率分布直方图：将频率分布表中的结果，绘制成的，以数据的各分点为横坐标，以频率除以组距为纵坐标的直方图，叫做频率分布直方图。

图中每个小长方形的高等于该组的频率除以组距。

每个小长方形的面积等于该组的频率。

所有小长方形的面积之和等于各组频率之和等于 1。

样本的频率分布反映样本中各数据的个数分别占样本容量 n 的比例的大小，总体分布反映总体中各组数据的个数分别在总体中所占比例的大小，一般是用样本的频率分布去估计总体的频率分布。

2、研究频率分布的方法：得到一数据的频率分布和方法，通常是先整理数据，后画出频率分布直方图，其步骤是：

(1) 计算最大值与最小值的差；(2) 决定组距与组数；(3) 决定分点；(4) 列频率分布表；(5) 绘频率分布直方图。

例题：

例 1、某养鱼户搞池塘养鱼，放养鳊鱼苗 20000 尾，其成活率为 70%，随意捞出 10 尾鱼，称得每尾的重量如下（单位：千

克) 0.8、0.9、1.2、1.3、0.8、1.1、1.0、1.2、0.8、0.9

根据样本平均数估计这塘鱼的总产量是多少千克？

分析：先算出样本的平均数，以样本平均数乘以 20000，再乘以 70%。

解：略

[规律总结] 求平均数有三种方法，即当所给数据比较分散时，一般用平均数的概念来求；若所给数据较大且都在某一数 a 上下波动时，通常采用简化公式；若所给数据重复出现时，通常采用加权平均数公式来计算。

例 2、一次科技知识竞赛，两次学生成绩统计如下

分 数	50	60	70	80	90	100
甲组人数	2	5	10	13	14	6
乙组人数	4	4	16	2	12	12

已经算得两个组的人均分都是 80 分，请根据你所学过的统计知识进一步判断这两个组成绩谁优谁次，并说明理由

解：(1) 甲组成绩的众数 90 分，乙组成绩的众数为 70 分，从众数比较看，甲组成绩好些。

$$(2) \text{算得 } S_{\text{甲}}^2 = 172, S_{\text{乙}}^2 = 256$$

所以甲组成绩较乙组波动要小。

(3) 甲、乙两组成绩的中位数都是 80 分，甲组成绩在中位数以上的有 33 人，乙组成绩在中位数以上的有 26 人，从这一角度看甲组的成绩总体要好。

(4) 从成绩统计表看，甲组成绩高于 80 分的人数为 20 人，乙组成绩高于 80 分的人数为 24 人，所以，乙组成绩集中在高分段的人数多，同时，乙组得满分的人数比甲组得满分的人数多 6 人，从这一角度看，乙组的成绩较好。

[规律总结] 明确方差或标准差是衡量一组数据的波动的大小的，恰当选用方差的三个计算公式，应抓住三个公式的特征，根据题中数据的特点选用计算公式。

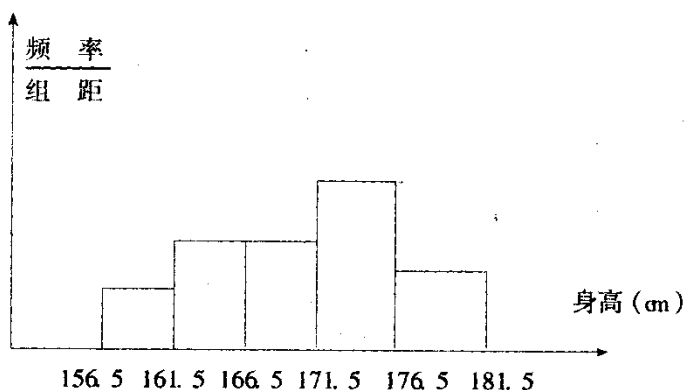
例 3、到从某学校 3600 人中抽出 50 名男生，取得他们的身高（单位 cm），数据如下：181 181 179 177 177 177 176 175 175 175 175 174 174 174 174 173 173 173 173 172 172 172 172 171 171 171 170 170 169 169

168 167 167 167 166 166 166 166 166 166 165
165 165 163 163 162 161 160 158 157

- 1、计算频率，并画出频率分布直方图
- 2、上指出身高在哪一组内的男学生人数所占的比最大
3. 请估计这些初三男学生身高在 166.5cm 以下的约有多少人？

分 组	频数累计	频 数	频 率
156.5—161.5	正	4	
161.5—166.5	正正一	11	
166.5—171.5	正正一	11	
171.5—176.5	正正正下	18	
176.5—181.5	正一	6	
合 计		50	

解：1、各组频率依次是：0.08，0.22，0.22，0.36，0.12



2、从频率分布表（或图）中，可见身高在 171.5—176.5 组内男学生人数所占的比最大。

3、这个地方男学生身高 166.5 侧以下的约为 $3000 \times (0.08 + 0.22) = 900$ （人）

[规律总结] 要掌握获得一组数据的频率分布的五大步骤，掌握整理数据的步骤和方法。会对数据进行合理的分组。

几何部分

第一章：线段、角、相交线、平行线

知识点：

一、直线：直线是几何中不加定义的基本概念，直线的两大特征是“直”和“向两方无限延伸”。

二、直线的性质：经过两点有一条直线，并且只有一条直线，直线的这条性质是以公理的形式给出的，可简述为：过两点有且只有一条直线，两直线相交，只有一个交点。

三、射线：

1、射线的定义：直线上一点和它们的一旁的部分叫做射线。

2. 射线的特征：“向一方无限延伸，它有一个端点。”

四、线段：

1、线段的定义：直线上两点和它之间的部分叫做线段，这两点叫做线段的端点。

2、线段的性质（公理）：所有连接两点的线中，线段最短。

五、线段的中点：

1、定义如图 1-1 中，点 B 把线段 AC 分成两条相等的线段，点 B 叫做线段 AC 的中点。

2、表示法：

$$\because AB=BC$$

$\therefore$ 点 B 为 AC 的中点

$$\text{或} \because AB = \frac{1}{2} AC$$

$\therefore$ 点 B 为 AC 的中点，或 $\because AC=2AB$ ， $\therefore$ 点 B 为 AC 的中点
反之也成立

$\because$ 点 B 为 AC 的中点， $\therefore AB=BC$

或 $\because$ 点 B 为 AC 的中点， $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$

或 $\because$ 点 B 为 AC 的中点， $\therefore AC=2BC$

六、角

1、角的两种定义：一种是有公共端点的两条射线所组成的图形叫做角。要弄清定义中的两个重点①角是由两条射线组成的图形；②这两条射线必须有一个公共端点。另一种是一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形。可以看出在起始位置的射线与终止位置的射线就形成了一个角。

2. 角的平分线定义：一条射线把一个角分成两个相等的角，

这条射线叫做这个角的平分线。表示法有三种：如图 1-2

$$(1) \angle AOC = \angle BOC$$

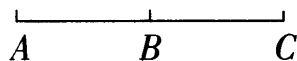


图 1-1

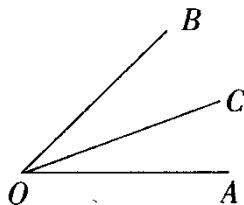


图 1-2

$$(2) \angle AOB = 2\angle AOC = 2\angle COB$$

$$(3) \angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

七、角的度量：度量角的大小，可用“度”作为度量单位。把一个圆周分成 360 等份，每一份叫做一度的角。1 度=60 分；1 分=60 秒。

八、角的分类：

(1) 锐角：小于直角的角叫做锐角

(2) 直角：平角的一半叫做直角

(3) 钝角：大于直角而小于平角的角

(4) 平角：把一条射线，绕着它的端点顺着一个方向旋转，当终止位置和起始位置成一直线时，所成的角叫做平角。

(5) 周角：把一条射线，绕着它的端点顺着一个方向旋转，当终边和始边重合时，所成的角叫做周角。

(6) 周角、平角、直角的关系是：1 周角=2 平角=4 直角=360°

九、相关的角：

1、对顶角：一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，这两个角叫做对顶角。

2、互为补角：如果两个角的和是一个平角，这两个角做互为补角。

3、互为余角：如果两个角的和是一个直角，这两个角叫做互为余角。

4、邻补角：有公共顶点，一条公共边，另两条边互为反向延长线的两个角做互为邻补角。

注意：互余、互补是指两个角的数量关系，与两个角的位置无关，而互为邻补角则要求两个角有特殊的位置关系。

十、角的性质

1、对顶角相等。

2、同角或等角的余角相等。

3、同角或等角的补角相等。

十一、相交线

1、斜线：两条直线相交不成直角时，其中一条直线叫做另一条直线的斜线。它们的交点叫做斜足。

2、两条直线互相垂直：当两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线互相垂直。

3、垂线：当两条直线互相垂直时，其中的一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点叫做垂足。

4、垂线的性质

(1) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。

(2) 直线外一点与直线上各点连结的所有线段中，垂线段最短。简单说：垂线段最短。

十二、距离

1、两点的距离：连结两点的线段的长度叫做两点的距离。

2、从直线外一点到这条直线的垂线段的长度叫做点到直线的距离。

3、两条平行线的距离：两条直线平行，从一条直线上的任意一点向另一条直线引垂线，垂线段的长度，叫做两条平行线的距离。

说明：点到直线的距离和平行线的距离实际上是两个特殊点之间的距离，它们与点到直线的垂线段是分不开的。

十三、平行线

1、定义：在同一平面内，不相交的两条直线叫做平行线。

2、平行公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行。

3、平行公理的推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。

说明：也可以说两条射线或两条线段平行，这实际上是指它们所在的直线平行。

4、平行线的判定：

(1) 同位角相等，两直线平行。

(2) 内错角相等，两直线平行。

(3) 同旁内角互补，两直线平行。

5、平行线的性质

(1) 两直线平行，同位角相等。

(2) 两直线平行，内错角相等。

(3) 两直线平行，同旁内角互补。

说明：要证明两条直线平行，用判定公理（或定理）在已知条件中有两条直线平行时，则应用性质定理。

6、如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补。

注意：当角的两边平行且方向相同（或相反）时，这两个角相等。当角的两边平行且一边方向相同另一方向相反时，这两个角互补。

例题：

方法 1：利用特殊“点”和线段的长

例 1、已知：如图 1-3，C 是线段 AB 的中点，D 是线段 CB 的中点，BD=1.2cm。求：AD 的长。

[思路分析]由 D 是 CB 中点，DB 已知可求出 CB，再由 C 点是 AB 中点可求出 AB 长，用 AB 减减去 DB 可求 AD。

解：略

[规律总结]利用线段的特殊点如“中点”“比例点”求线段的长的方法是较为简便的解法。

方法 2：如何辨别角的个数与线段条数。

例 2、如图 1-4 在线段 AE 上共有 5 个点 A、B、C、D、E 怎样才数出所有线段，



图 1 - 4

[思路分析]本问题如不认真审题会误以为有 4 点恰有 4 个空就是 4 条线段即 AB、BC、CD、ED；而如果从一个端点出发、再找出另一个端点确定线段，就会发现有 10 条线段：

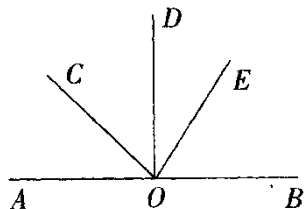
即：AB、AC、AD、AE、BC、BD、BE、CD、CE、DE 共 10 条。

[规律总结]此类型题如果做到不重不漏，最好方法是先从一个端点出发，

再找出另一个端点确定线段。

例 3、如图 1-5 指出图形中直线 AB 上方角的个数（不含平角）

[思路分析]此题有些同学不认真分析误认为就 4 个角，其实共有 9 个角。即：∠AOC、∠AOD、∠AOE、∠COD、∠COE、∠COB、∠DOE、∠DOB、∠EOB 共 9 个角。



[规律总结]从一个顶点引出多条射线时，为了确定角的个数，一般按边顺序分类统计，避免既不重复又不遗漏。

方法 3：用代数法求角度

例 4、已知一个锐角的余角，是这个锐角的补角的 $\frac{1}{6}$ ，求这个角。

[思路分析]本题涉及到的角是锐角同它的余角及补角。根据互为余角，互为补角的概念，考虑它们在数量上有什么关系？设锐角为 x ，则它的余角为 $90 - x$ ，它的补角为 $180 - x$ ，这就可以列方程了。

解：略

[规律总结]有关余角、补角的问题，一般都用代数方法先设未知数，再依题意列出方程，求出结果。

方法 4：添加辅助线平移角

例 5、已知：如图 1—6， $AB \parallel ED$

求证： $\angle B + \angle BCD + \angle D = 360^\circ$

[思路分析]我们知道只有周角是等于 360° ，而图中又出现了与 $\angle BCD$ 相关的以 C 为顶点的周角，若能把 $\angle B$ 、 $\angle D$ 移到与 $\angle BCD$ 相邻且以 C 为顶点的位置，即可把 $\angle B$ 、 $\angle BCD$ 和 $\angle D$ 三个角组成一分周角，则可推出结论。

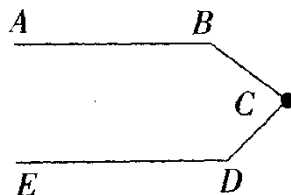


图 1—6

证时：略

规律总结]此题虽是三种证法但思想是一样的，都是通过加辅助线，平移角达到目的，这种处理方法在几何中常常用到。

几何部分

第二章：三角形

知识点：

一、关于三角形的一些概念

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形。

组成三角形的线段叫三角形的边；相邻两边的公共端点叫三角形的顶点；相邻两边所组成的角叫三角形的内角，简称三角形的角。

1、三角形的角平分线。

三角形的角平分线是一条线段（顶点与内角平分线和对边交线间的距离）

2、三角形的中线

三角形的中线也是一条线段（顶点到对边中点间的距离）

3. 三角形的高

三角形的高线也是一条线段（顶点到对边的距离）

注意：三角形的中线和角平分线都在三角形内。

如图 2—1， AD 、 BE 、 CF 都是 $\triangle ABC$ 的角平分线，它们都在 $\triangle ABC$ 内

如图 2—2， AD 、 BE 、 CF 都是 $\triangle ABC$ 的中线，它们都在 $\triangle ABC$ 内

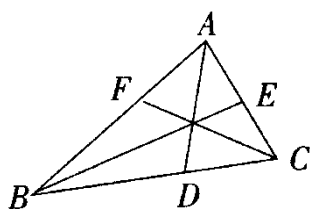


图 2-1

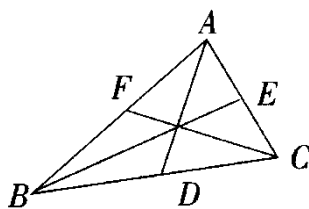


图 2-2

而图 2-3，说明高线不一定在 $\triangle ABC$ 内，

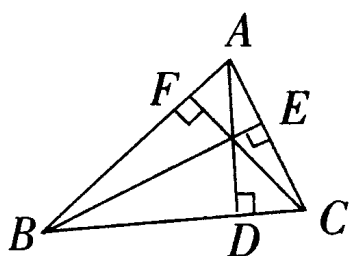


图 2-3—(1)

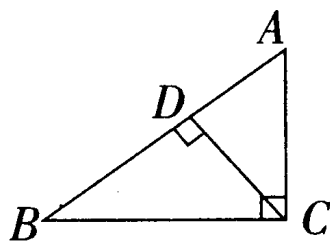


图 2-3—(2)

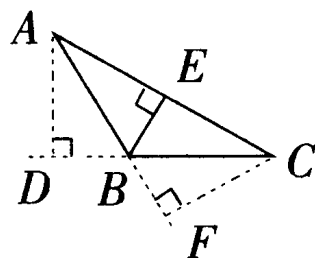


图 2-3—(3)

图 2-3—(1)，中三条高线都在 $\triangle ABC$ 内，

图 2-3—(2)，中高线 CD 在 $\triangle ABC$ 内，而高线 AC 与 BC 是三角形的边；

图 2-3—(3)，中高线 BE 在 $\triangle ABC$ 内，而高线 AD 、 CF 在 $\triangle ABC$ 外。

三、三角形三条边的关系

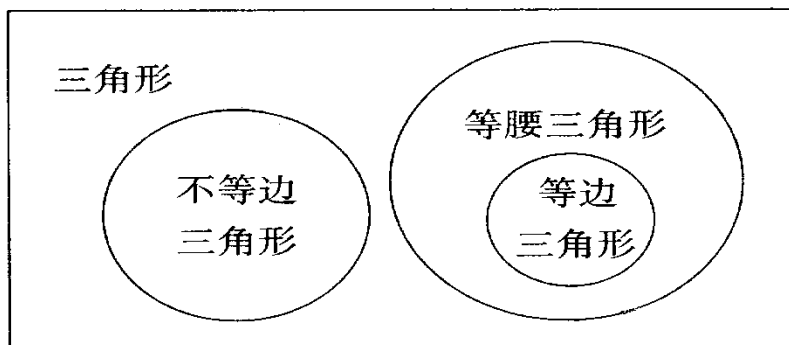
三角形三边都不相等，叫不等边三角形；有两条边相等的叫等腰三角形；三边都相等的则叫等边三角形。

等腰三角形中，相等的两条边叫腰，另一边叫底边，腰和底边的夹角叫底角，两腰的夹角叫顶角。

三角形按边相等关系来分类：

$$\text{三角形} \begin{cases} \text{不等边三角形} \\ \text{等腰三角形} \begin{cases} \text{底边和腰不相等的等腰三角形} \\ \text{等边三角形} \end{cases} \end{cases}$$

用集合表示，见图 2-4



推论三角形两边的差小于第三边。

不符合定理的三条线段，不能组成三角形的三边。

例如三条线段长分别为 5, 6, 1 人因为 $5+6<12$ ，所以这三条线段，不能作为三角形的三边。

三、三角形的内角和

定理三角形三个内角的和等于 180°

由定理可知，三角形的二个角已知，那么第三角可以由定理求得。

如已知 $\triangle ABC$ 的两个角为 $\angle A=90^\circ$ ， $\angle B=40^\circ$ ，则 $\angle C=180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

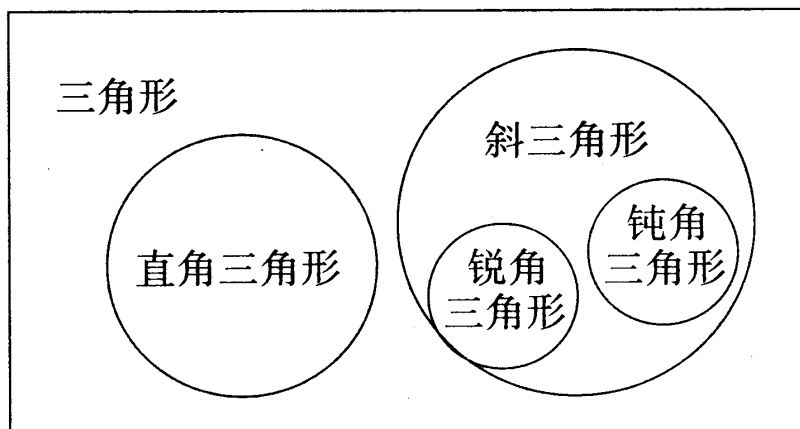
由定理可以知道，三角形的三个内角中，只可能有一个内角是直角或钝角。

推论 1：直角三角形的两个锐角互余。

三角形按角分类：

三角形	{	直角三角形
		斜三角形 { 锐角三角形 钝角三角形

用集合表示，见图



三角形一边与另一边的延长线组成的角，叫三角形的外角。

推论 2：三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和。

推论 3：三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角。

例如图 2—6 中

$$\angle 1 > \angle 3; \angle 1 = \angle 3 + \angle 4; \angle 5 > \angle 3 + \angle 8; \angle 5 = \angle 3 + \angle 7 + \angle 8;$$

$$\angle 2 > \angle 8; \angle 2 = \angle 7 + \angle 8; \angle 4 > \angle 9; \angle 4 = \angle 9 + \angle 10 \text{ 等等。}$$

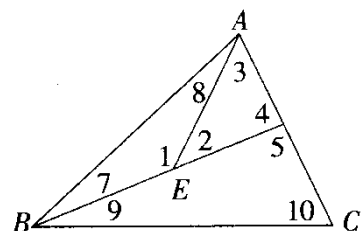


图 2—6

四、全等三角形

能够完全重合的两个图形叫全等形。

两个全等三角形重合时，互相重合的顶点叫对应顶点，互相重合的边叫对应边，互相重合的角叫对应角。

全等用符号“ $\cong$ ”表示

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 表示 A 和 A' ， B 和 B' ， C 和 C' 是对应点。

全等三角形的对应边相等；全等三角形的对应角相等。

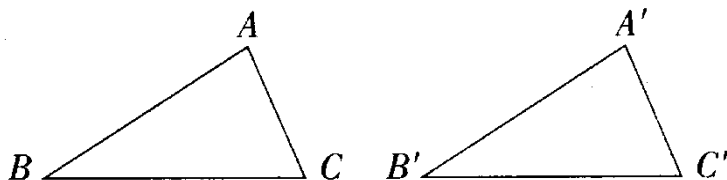


图 2—7

如图 2—7， $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，则有 A、B、C 的对应点 A' 、 B' 、 C' ；AB、BC、CA 的对应边是 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $C'A'$ 。

$\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对应角是 $\angle A'$ 、 $\angle B'$ 、 $\angle C'$ 。

$\therefore AB=A'B', BC=B'C', CA=C'A'; \angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'$

五、全等三角形的判定

1、边角边公理：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）

注意：一定要是两边夹角，而不能是边边角。

2、角边角公理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）

3、推论有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）

4、边边边公理有三边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）

由边边边公理可知，三角形的重要性质：三角形的稳定性。

除了上面的判定定理外，“边边角”或“角角角”都不能保证两个三角形全等。

5、直角三角形全等的判定：斜边、直角边公理有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边，直角边”或“HL”）

六、角的平分线

定理1、在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等。

定理2、一个角的两边的距离相等的点，在这个角的平分线上。

由定理1、2可知：角的平分线是到角的两边距离相等的所有点的集合。

可以证明三角形内存在一个点，它到三角形的三边的距离相等这个点就是三角形的三条角平分线的交点（交于一点）

在两个命题中，如果第一个命题的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做互为逆命题，如果把其中的一个做原命题，那么另一个叫它的逆命题。

如果一个定理的逆命题经过证明是真命题，那么它也是一个定理，这两个定理叫互逆定理，其中一个叫另一个的逆定理。

例如：“两直线平行，同位角相等”和“同位角相等，两直线平行”是互逆定理。

一个定理不一定有逆定理，例如定理：“对顶角相等”就没逆定理，因为“相等的角是对顶角”这是一个假命题。

七、基本作图

限定用直尺和圆规来画图，称为尺规作图。

最基本、最常用的尺规作图，通常称为基本作图，例如做一条线段等于已知线段。

1、作一个角等于已知角：作法是使三角形全等（SSS），从而得到对应角相等；

2、平分已知角：作法仍是使三角形全等（SSS），从而得到对应角相等。

3、经过一点作已知直线的垂线：（1）若点在已知直线上，可看作是平分已知角平角；（2）若点在已知直线外，可用类似平分已知角的方法去做：已知点C为圆心，适当长为半径作弧交已知直线于A、B两点，再以A、B为圆心，用相同的长为半径分别作弧交于D点，连结CD即为所求垂线。

4、作线段的垂直平分线：

线段的垂直平分线也叫中垂线。

做法的实质仍是全等三角形（SSS）。

也可以用这个方法作线段的中点。

八、作图题举例

重要解决求作三角形的问题

1、已知两边一夹角，求作三角形

2、已知底边上的高，求作等腰三角形

九、等腰三角形的性质定理

等腰三角形的性质定理：等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”）

推论1：等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边，就是说：等腰三角形的顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合。

推论2：等边三角形的各角都相等，并且每一个角都等于 60°

例如：等腰三角形底边中线上任一点到两腰的距离相等，因为等腰三角形底边中线就是顶角的角平分线、而角平分线上的点到角的两边距离相等。

十、等腰三角形的判定

定理：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的两条边也相等。（简写成“等角对等边”）。

推论1：三个角都相等的三角形是等边三角形

推论2：有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形

推论3：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半。

十一、线段的垂直平分线

定理：线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点的距离相等

逆定理：和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。

就是说：线段的垂直平分线可以看作是和线段两个端点距离相等的所有点的集合。

十二、轴对称和轴对称图形

把一个图形沿着某一条直线折叠，如果能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线轴对称，两个图形中的对应点叫关于这条直线的对称点，这条直线叫对称轴。

两个图形关于直线对称也叫轴对称。

定理1：关于某条直线对称的两个图形是全等形。

定理2：如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是对应点连线的垂直平分线。

定理3：两个图形关于某条直线对称，如果它们的对应线段或延长相交，那么交点在对称轴上。

逆定理：如果两个图形的对应点连线被一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称。

如果一个图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线就是对称轴。

例如：等腰三角形顶角的分角线就具有上面所述的特点，所以等腰三角形顶角的分角线是等腰三角形的一条对称轴，而等腰三角形是轴对称图形。

十三、勾股定理

勾股定理：直角三角形两直角边 a 、 b 的平方和等于斜边 c 的平方： $a^2 + b^2 = c^2$

勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 有下面关系：

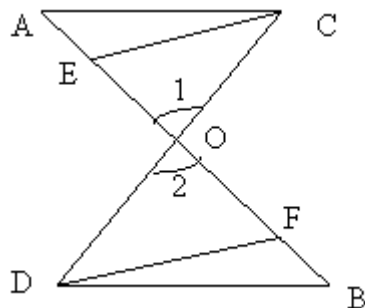
$$a^2 + b^2 = c^2$$

那么这个三角形是直角三角形

例题：

例1、已知：AB、CD相交于点O，AC//DB，OC=OD，E、F为AB上两点，且AE=BF。求证：CE=DF

分析：要证CE=DF，可证 $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ ，但由已知条件直接证不出全等，这时由已知



条件可先证出 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ，得出 $AC=BD$ ，从而证出 $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ 。

证明：略

例2、已知：如图， $AB=CD$ ， $BC=DA$ ， E 、 F 是 AC 上两点，且 $AE=CF$ 。

求证： $BF=DE$

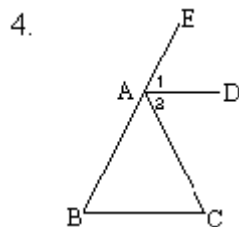
分析：观察图形， BF 和 DE 分别在 $\triangle CFB$ 和 $\triangle AED$ （或 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ ）中，由已知条件不能直接证明这两个三角形全等。这时可由已知条件先证明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ ，由此得 $\angle 1 = \angle 2$ ，从而证出 $\triangle CFB \cong \triangle AED$ 。

证明：略

例3、已知： $\angle CAE$ 是三角形 ABC 的外角， $\angle 1 = \angle 2$ ， $AD \parallel BC$ 。

求证： $AB=AC$

证明：略



例4、已知：如图 3—89， OE 平分 $\angle AOB$ ， $EC \perp OA$ 于 C ， $ED \perp OB$ 于 D 。求证：（1） $OC=OD$ ；（2） OE 垂直平分 CD 。

分析：证明第（1）题时，利用“等角的余角相等”可得到 $\angle OEC = \angle OED$ ，再利用角平分线的性质定理得到 $OC=OD$ 。这样处理，可避免证明两个三角形全等。

证明：略

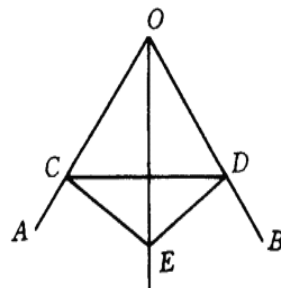


图 3-89

几何部分

第三章：四边形

知识点：

一、多边形

1、多边形：由一些线段首尾顺次连结组成的图形，叫做多边形。

2、多边形的边：组成多边形的各条线段叫做多边形的边。

3、多边形的顶点：多边形每相邻两边的公共端点叫做多边形的顶点。

4、多边形的对角线：连结多边形不相邻的两个顶点的线段叫

做多边形的对角线。

5、多边形的周长：多边形各边的长度和叫做多边形的周长。

6、凸多边形：把多边形的任何一条边向两方延长，如果多边形的其他各边都在延长线所得直线的同旁，这样的多边形叫凸多边形。

说明：一个多边形至少要有三条边，有三条边的叫做三角形；有四条边的叫做四边形；有几条边的叫做几边形。今后所说的多边形，如果不特别声明，都是指凸多边形。

7、多边形的角：多边形相邻两边所组成的角叫做多边形的内角，简称多边形的角。

8、多边形的外角：多边形的角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做多边形的外角。

注意：多边形的外角也就是与它有公共顶点的内角的邻补角。

9、 n 边形的对角线共有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条。

说明：利用上述公式，可以由一个多边形的边数计算出它的对角线的条数，也可以由一个多边形的对角线的条数求出它的边数。

10、多边形内角和定理： n 边形内角和等于 $(n-2)180^\circ$ 。

11、多边形内角和定理的推论： n 边形的外角和等于 360° 。

说明：多边形的外角和是一个常数（与边数无关），利用它解决有关计算题比利用多边形内角和公式及对角线求法公式简单。无论用哪个公式解决有关计算，都要与解方程联系起来，掌握计算方法。

二、平行四边形

1、平行四边形：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。

2、平行四边形性质定理 1：平行四边形的对角相等。

3、平行四边形性质定理 2：平行四边形的对边相等。

4、平行四边形性质定理 2 推论：夹在平行线间的平行线段相等。

5、平行四边形性质定理 3：平行四边形的对角线互相平分。

6、平行四边形判定定理 1：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。

7、平行四边形判定定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形。

8、平行四边形判定定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形。

9、平行四边形判定定理 4：两组对角分别相等的四边形是平行四边形。

说明：（1）平行四边形的定义、性质和判定是研究特殊平行四边形的基础。同时又是证明线段相等，角相等或两条直线互相平行的重要方法。

（2）平行四边形的定义即是平行四边形的一个性质，又是平行四边形的一个判定方法。

三、矩形

矩形是特殊的平行四边形，从运动变化的观点来看，当平行四边形的一个内角变为 90° 时，其它的边、角位置也都随之变化。因此矩形的性质是在平行四边形的基础上扩充的。

1、矩形：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形（通常也叫作长方形）

2、矩形性质定理 1：矩形的四个角都是直角。

3. 矩形性质定理 2：矩形的对角线相等。

4、矩形判定定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形。

说明：因为四边形的内角和等于 360° ，已知有三个角都是直角，那么第四个角必定是直角。

5、矩形判定定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形。

说明：要判定四边形是矩形的方法是：

法一：先证明出是平行四边形，再证出有一个直角（这是用定义证明）

法二：先证明出是平行四边形，再证出对角线相等（这是判定定理 1）

法三：只需证出三个角都是直角。（这是判定定理 2）

四、菱形

菱形也是特殊的平行四边形，当平行四边形的两个邻边发生变化时，即当两个邻边相等时，平行四边形变成了菱形。

1、菱形：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形。

2、菱形的性质 1：菱形的四条边相等。

3、菱形的性质 2：菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角。

4、菱形判定定理 1：四边都相等的四边形是菱形。

5、菱形判定定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

说明：要判定四边形是菱形的方法是：

法一：先证出四边形是平行四边形，再证出有一组邻边相等。（这就是定义证明）。

法二：先证出四边形是平行四边形，再证出对角线互相垂直。
（这是判定定理 2）

法三：只需证出四边都相等。（这是判定定理 1）

（五）正方形

正方形是特殊的平行四边形，当邻边和内角同时运动时，又能使平行四边形的一个内角为直角且邻边相等，这样就形成了正方形。

1、正方形：有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形。

2、正方形性质定理 1：正方形的四个角都是直角，四条边都相等。

3、正方形性质定理 2：正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每条对角线平分一组对角。

4、正方形判定定理互：两条对角线互相垂直的矩形是正方形。

5、正方形判定定理 2：两条对角线相等的菱形是正方形。

注意：要判定四边形是正方形的方法有

方法一：第一步证出有一组邻边相等；第二步证出有一个角是直角；第三步证出是平行四边形。（这是用定义证明）

方法二：第一步证出对角线互相垂直；第二步证出是矩形。（这是判定定理 1）

方法三：第一步证出对角线相等；第二步证出是菱形。（这是判定定理 2）

六、梯形

1、梯形：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形。

2、梯形的底：梯形中平行的两边叫做梯形的底（通常把较短的底叫做上底，较长的边叫做下底）

3、梯形的腰：梯形中不平行的两边叫做梯形的腰。

4、梯形的高：梯形有两底的距离叫做梯形的高。

5、直角梯形：一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形。

6、等腰梯形：两腰相等的梯形叫做等腰梯形。

7、等腰梯形性质定理 1：等腰梯形在同一底上的两个角相等。

8、等腰梯形性质定理 2：等腰梯形的两条对角线相等。

9、等腰梯形的判定定理 1：在同一个底上两个角相等的梯形是等腰梯形。

10、等腰梯形的判定定理 2：对角线相等的梯形是等腰梯形。

研究等腰梯形常用的方法有：化为一个等腰三角形和一个平

行四边形；或两个全等的直角三角形和一矩形；或作对角线的平行线交下底的延长线于一点；或延长两腰交于一点。

七、中位线

1、三角形的中位线连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。

说明：三角形的中位线与三角形的中线不同。

2、梯形的中位线：连结梯形两腰中点的线段叫做梯形中位线。

3、三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半。

4、梯形中位线定理：梯形中位线平行于两底，并且等于两底和的一半。

八、多边形的面积

说明：多边形的面积常用的求法有：

图 形	面积公式	附 注
三 角 形	$S = \frac{1}{2} ah$ $S = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot h$	a, b, c 为三角形的三边, h 为 a 边上的高。
等边三角形	$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	a 为边长。
矩 形	$S = ab$	a 为边长, b 为宽。
正 方 形	$S = a^2$	a 为边长。
平行四边形	$S = ah$	a 为边长, h 为 a 边上的高。
菱 形	$S = \frac{1}{2} ef$ $S = ah$	e, f 为对角线长, a 为边长, h 为 a 边上的高。
梯 形	$S = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$ $S = \frac{1}{2} mh$	a, b 为两底长, h 为高, m 为中位线
正多边形	$S = pr$	r 为边心距, p 为周长一半。

(1)将任意一个平面图形划分为若干部分再通过求部分的面积的和，求出原来图形的面积这种方法叫做分割法。如图 3-1，作六边形的最长的一条对角线，从其它各顶点向这条对角线引垂线，把六边形分成四个直角三角形和两个直角梯形，计算它们的面积再相加。

(2)将一个平面图形的某一部分割下来移放在另一个适当的

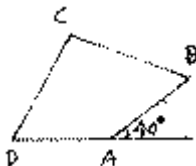
位置上，从而改变原来图形的形状。利用计算变形后的图形的面积来求原图形的面积的这种方法。叫做割补法。——

(3) 将一个平面图形通过拼补某一图形，使它变为另一个图形，利用新的图形减去所补充图形的面积，来求出原来图形面积的这种方法叫做拼凑法。

注意：两个图形全等，它们的面积相等。等底等高的三角形面积相等。一个图形的面积等于它的各部分面积的和。

例题：

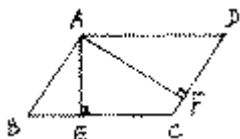
例 1、如图 41-2，求 $\angle B + \angle C + \angle D$ 的度数和。



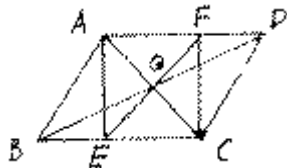
例 2、一个多边形的每一个外角都等于 45° ，那么这个多边形的内角和是多少度。

分析：用多边形外角和公式就可以求解。

例 3、已知：如图 43-1，在 $\square ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于 E ， $AF \perp DC$ 于 F ， $\angle EAF = 60^\circ$ ， $BE = 2\text{cm}$ ， $DF = 3\text{cm}$ 。求 $\square ABCD$ 内角的度数与边长。



例 4、如图 45-4，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于 O 点， EF 过 O 分别交 BC 、 AD 于点 E 、 F ，且 $AE \perp BC$ ，求证：四边形 $AECF$ 是矩形。



例 5、如图 48-3，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， M 、 N 分别为 CD 、 AB 的中点，且 $MN \perp AB$ 。
求证：梯形 $ABCD$ 是等腰梯形。

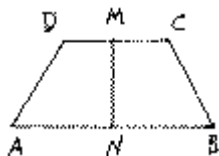
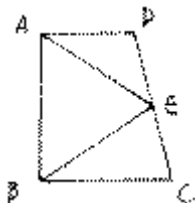


图 48-3

例 6、已知：如图 49-2，梯形 ABCD 中， $AB \perp BC$ ， $DE=EC$ 。求证： $AE=EB$ 。



几何部分

第四章：相似形

知识点：

一、比例线段

1、比：选用同一长度单位量得两条线段。a、b 的长度分别是 m、n，那么就说这两条线段的比是 $a:b=m:n$ （或 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ ）

2、比的前项，比的后项：两条线段的比 $a:b$ 中。a 叫做比的前项，b 叫做比的后项。

说明：求两条线段的比时，对这两条线段要用同一单位长度。

3、比例：两个比相等的式子叫做比例，如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

4、比例外项：在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ （或 $a:b=c:d$ ）中 a、d 叫做比例外项。

5、比例内项：在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ （或 $a:b=c:d$ ）中 b、c 叫做比例内项。

6、第四比例项：在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ （或 $a:b=c:d$ ）中，d 叫 a、b、c 的第四比例项。

7、比例中项：如果比例中两个比例内项相等，即比例为 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$

（或 $a:b=b:c$ 时，我们把 b 叫做 a 和 d 的比例中项。

8、比例线段：在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么，这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段。

9、比例的基本性质：如果 $a:b=c:d$ 那么 $ad=bc$ 逆命题也成立，即如果 $ad=bc$ ，那么 $a:b=c:d$

10、比例的基本性质推论：如果 $a:b=b:d$ 那么 $b^2=ad$ ，逆定理是如果 $b^2=ad$ 那么 $a:b=b:c$ 。说明：两个论是比积相等的式子叫做等积式。比例的基本性质及推例式与等积式互化的理论依据。

11、合比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

12. 等比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \dots = \frac{m}{n}$ ，（ $b+d+\dots+m \neq 0$ ），

那么 $\frac{a+c+\dots+m}{b+d+\dots+n} = \frac{a}{b}$

说明：应用等比性质解题时常采用设已知条件为 k ，这种方法思路单一，方法简单不易出错。

13、黄金分割把一条线段分成两条线段，使较长的线段是原线段与较小的线段的比例中项，叫做把这条线段黄金分割。

说明：把一条线段黄金分割的点，叫做这条线段的黄金分割

点，在线段 AB 上截取这条线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍得到点 C ，则点 C 就是

AB 的黄金分割点。

二、平行线分线段成比例

1、平行线等分线段定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其它直线上截得的线段也相等。

格式：如果直线 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ， $AB=BC$ ，

那么： $A_1B_1=B_1C_1$ ，如图 4-1

说明：由此定理可知推论 1 和推论 2

推论 1：经过梯形一腰的中点与底平行的直线必平分另一腰。

格式：如果梯形 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AE=EB$ ， $EF \parallel AD$ ，那么 $DF=FC$

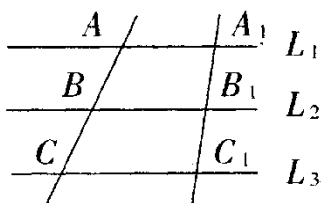


图 4-1

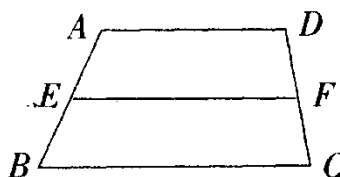


图 4-2

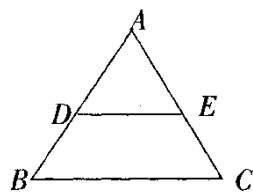


图 4-3

推论 2：经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边。

格式，如果 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点， $DE \parallel BC$ ，那么 $AE = EC$ ，如图 4—3

2、平行线分线段成比例定理：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例。

说明：平行线等分线段定理是平行线分线段成比例定理的特殊情况。

$$\frac{I_{\text{上}}}{I_{\text{下}}} = \frac{II_{\text{上}}}{II_{\text{下}}} \text{ 或 } \frac{I_{\text{上}}}{I_{\text{全}}} = \frac{II_{\text{上}}}{II_{\text{全}}} \text{ 或 } \frac{I_{\text{上}}}{I_{\text{下}}} = \frac{II_{\text{上}}}{II_{\text{下}}} \text{ 或 } \frac{I_{\text{全}}}{I_{\text{下}}} = \frac{II_{\text{全}}}{II_{\text{下}}} \text{ 等。}$$

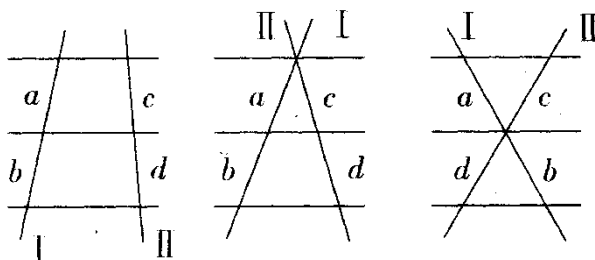


图 4-4

3. 平行线分线段成比例定理的推论：平行于三角形一边的直线截其它两边，所得的对应线段成比例。

说明 1：平行线分线段成比例定理可用形象的语言来表达。如图 4—4

说明 2：图 4—4 的三种图形中这些成比例线段的位置关系依然存在。

4、三角形一边的平行线的判定定理。如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。

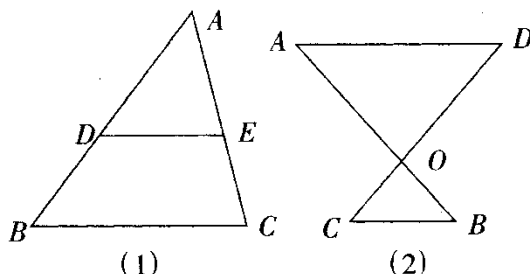


图 4-5

5、三角形一边的平行线的判定定理：平行于三角形的一边，并且和其它两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例。

6、线段的内分点：在一条线段上的一个点，将线段分成两条线段，这个点叫做这条线段的内分点。

7、线段的外分点：在一条线段的延长线上的点，有时也叫做这条线段的外分点。

说明：外分点分线段所得的两条线段，也就是这个点分别和线段的两个端点确定的线段。

三、相似三角形

1、相似三角形：两个对应角相等，对应边成比例的三角形叫做相似三角形。

说明：证两个三角形相似时和证两个三角形全等一样，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上，这样便于找出相似三角形的对应角和对应边。

2、相似比：相似三角形对应边的比 k ，叫做相似比（或叫做相似系数）。

3、相似三角形的基本定理：平分于三角形一边的直线和其它两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似。

说明：这个定理反映了相似三角形的存在性，所以有的书把它叫做相似三角形的存在定理，它是证明三角形相似的判定定理的理论基础。

4、三角形相似的判定定理：

（1）判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么就两个三角形相似。可简单说成：两角对应相等，两三角形相似。

（2）判定定理 2：如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似，可简单说成：两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似。

（3）判定定理 3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似，可简单说成：三边对应成比例，两三角形相似。

（4）直角三角形相似的判定定理如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。

说明：以上四个判定定理不难证明，以下判定三角形相似的命题是正确的，在解题时，也可以用它们来判定两个三角形的相似。

第一：顶角（或底角）相等的两个等腰三角形相似。

第二：腰和底对应成比例的两个等腰三角形相似。

第三：有一个锐角相等的两个直角三角形相似。

第四：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形和原三角形相似。

第五：如果一个三角形的两边和其中一边上的中线与另一个三角形的两边和其中一边上的中线对应成比例，那么这两个三角形相似。

5、相似三角形的性质：

（1）相似三角形性质 1：相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比。

（2）相似三角形性质 2：相似三角形周长的比等于相似比。

说明：以上两个性质简单记为：相似三角形对应线段的比等于相似比。

（3）相似三角形面积的比等于相似比的平方。

说明：两个三角形相似，根据定义可知它们具有对应角相等、对应边成比例这个性质。

6、介绍有特点的两个三角形

（1）共边三角形指有一条公共边的两个三角形叫做共边三角形。

（2）共角三角形有一个角相等或互补的两个三角形叫做共角三角形，如图 4—6

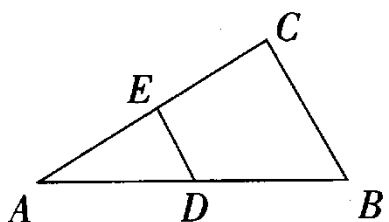


图 4-6

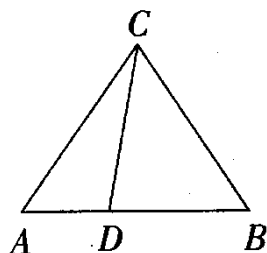
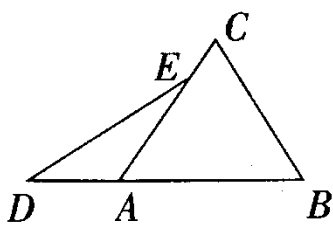


图 4-7

(3) 公边共角有一个公共角，而且还有一条公共边的两个三角形叫做公边共角三角形。

说明：具有公边共角的两个三角形相似，则公边的平方等于叠在一条直线上的两边的乘积：如图 4-7 若 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，则 $AC^2 = AD \cdot AB$

例题：

例 1、已知： $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}, \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ ，求： $\frac{a+b}{b-c}$ 的值。

分析：已知等比条件时常有以下几种求值方法：

- (1) 设比值为 k ；
- (2) 比例的基本性质；
- (3) 方程的思想，用其中一个字母表示其他字母。

解：由 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ 及 $\frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ ，得 $a:b=2:3, b:c=5:4$ ，即 $a:b:c=10:15:12$ 。
 设 $a=10k, b=15k, c=12k$ ，则 $(a+b):(b-c)=25:3$ 。

例 2 已知：如图 5-126(a)，在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ，对角线交于 O 点，过 O 作 $EF \parallel BC$ ，分别交 AB, DC 于 E, F。求证：(1) $OE=OF$ ；(2)

$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$ ；(3) 若 MN 为梯形中位线，求证 $AF \parallel MC$ 。

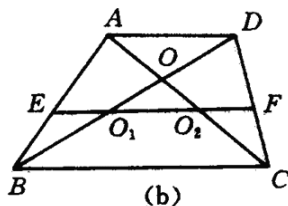
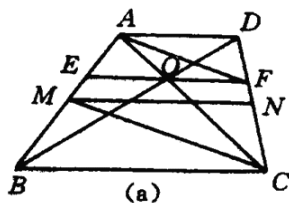


图 5-126

分析：

- (1) 利用比例证明两线段相等的方法。

①若 $\frac{a}{d} = \frac{c}{d}$, $a=c$ (或 $b=d$ 或 $a=b$), 则 $b=d$ (或 $a=c$ 或 $c=d$);

②若 $\frac{a}{d} = \frac{b}{a}$, 则 $a=b$ (只适用于线段, 对实数不成立);

③若 $\frac{a}{d} = \frac{c}{d}$, $\frac{a'}{d'} = \frac{c'}{d'}$, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, 则 $d=d'$.

(2) 利用平行线证明比例式及换中间比的方法.

(3) 证明 $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$ 时, 可将其转化为 “ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ” 类型后:

①化为 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1$ 直接求出各比值, 或可用中间比求出各比值再相加, 证明比值的和为 1;

②直接通分或移项转化为证明四条线段成比例.

(4) 可用分析法证明第(3)题, 并延长两腰将梯形问题转化为三角形问题.

延长 BA, CD 交于 S, $AF \parallel MC$

$$\begin{aligned}
 & \uparrow \\
 & \frac{SA}{SM} = \frac{SF}{SC} \\
 & \uparrow \frac{SA}{SM} = \frac{AD}{MN}, \frac{SF}{SC} = \frac{EF}{BC} \\
 & \frac{AD}{MN} = \frac{EF}{BC} \\
 & \uparrow \\
 & \frac{AD}{\frac{1}{2}(AD+BC)} = \frac{EF}{BC} \\
 & \uparrow \\
 & AD \cdot BC = \frac{1}{2} EF (AD + BC) \\
 & \uparrow \\
 & \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF} \text{ (已证) }
 \end{aligned}$$

$\therefore AF \parallel MC$ 成立.

(5) 用运动的观点将问题进行推广.

若直线 EF 平行移动后不过点 O, 分别交 AB, BD, AC, CD 于 E, O1, O2, F, 如图 5-126(b), O1F

与 $\angle 2$ 是否相等？为什么？

(6) 其它常用的推广问题的方法有：类比、从特殊到一般等

例 3 已知：如图 5-127，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， D 为 BC 中点， $DE \perp AC$ 于 E ， F 为 DE 中点， BE 交 AD 于 N ， AF 交 BE 于 M 。

求证： $AF \perp BE$ 。

分析：

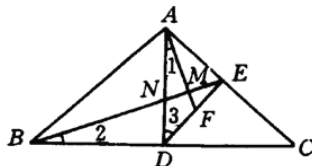


图 5-127

(1) 分解基本图形探求解题思路。

(2) 总结利用相似三角形的性质证明两角相等，进一步证明两直线位置关系（平行、垂直等）

的方法，利用 $\triangle ADE \sim \triangle DCE$ 得到 $\frac{AD}{DC} = \frac{DE}{CF}$

结合中点定义得到 $\frac{AD}{BC} = \frac{DF}{CE}$ ，结合 $\angle 3 = \angle C$ ，得到 $\triangle BEC \sim \triangle AFD$ ，因此 $\angle 1 = \angle 2$ 。进一步可得到 $AF \perp BE$ 。

(3) 总结证明四条线段成比例的常用方法：①比例的定义；②平行线分线段成比例定理；③三角形相似的预备定理；④直接利用相似三角形的性质；⑤利用中间比等量代换；⑥利用面积关系。

例 4 已知：如图 5-128， $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， $DE \perp AC$ 于 E ， $DF \perp BC$ 于 F 。

求证：(1) $CD^2 = AE \cdot BF$ ；(2) $BC^2 : AC^2 = CE : EA$ ；(3) $BC^3 : AC^3 = BF : AE$ 。

分析：

掌握基本图形“ $\text{Rt} \triangle ABC$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ”中的常用结论。

①勾股定理： $AC^2 + BC^2 = AB^2$ 。

②面积公式： $AC \cdot BC = AB \cdot CD$ 。

③三个比例中项： $AC^2 = AD \cdot AB$ ， $BC^2 = BD \cdot BA$ ， $CD^2 = DA \cdot DB$ 。

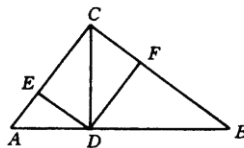


图 5-128

④两个等积式：
$$\begin{cases} AC \cdot CD = BC \cdot AD, \\ BC \cdot CD = AC \cdot BD \end{cases}$$
（可由图中：

⑤ $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD}{BD}$

证明：第(1)题：

$$\because CD^2 = AD \cdot BD,$$

$$\therefore CD^4 = AD^2 \cdot BD^2 = (AE \cdot AC) \cdot (BF \cdot BC) = (AE \cdot BF) (AC \cdot BC) \\ = (AE \cdot BF) \cdot (AB \cdot CD).$$

第(2)题：

$$\because \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot BA}{AD \cdot AB} = \frac{BD}{AD}, \text{ 利用 } \triangle BDF \sim \triangle DAE, \text{ 证得}$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DF}{EA} = \frac{CE}{AE}, \text{ 命题得证.}$$

第(3)题：

$$\because \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot AB}{AD \cdot AB} = \frac{BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{BC^4}{AC^4} = \frac{BD^2}{AD^2} = \frac{BF \cdot BC}{AE \cdot AC}, \therefore \frac{BC^3}{AC^3} = \frac{BF}{AE}$$

第五章：解直角三角形

知识点：

一、锐角三角函数：在直角三角形 ABC 中， $\angle C$ 是直角，
如图 5-1

1、正弦：把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

2、余弦：把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

3、正切：把锐角 A 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的正切，记作

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

4、余切：把锐角 A 的邻边与对边的比叫做 $\angle A$ 的余切，记作

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

说明：由定义可以看出 $\tan A \cdot \cot A = 1$ (或写成 $\tan A = \frac{1}{\cot A}$)

5、锐角三角函数：锐角 A 的正弦、余弦、正切、余切都叫做 $\angle A$ 的锐角三角函数

说明：锐角三角函数都不能取负值。

$$0 < \sin A < 1; \quad 0 < \cos A < 1$$

6、锐角的正弦和余弦之间的关系任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值。

$$\text{即 } \sin A = \cos(90^\circ - A) = \cos B; \quad \cos A = \sin(90^\circ - A) = \sin B$$

7、锐角的正切和余切之间的关系任意锐角的正切值等于它的余角的余切值，任意锐角的余切值等于它的余角的正切值。

$$\text{即 } \tan A = \cot(90^\circ - A) = \cot B; \quad \cot A = \tan(90^\circ - A) = \tan B$$

说明：式中的 $90^\circ - A = B$ 。

8、三角函数值的变化规律

(1) 当角度在 $0^\circ - 90^\circ$ 间变化时，正弦值（正切值）随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）

(2) 当角度在 $0^\circ - 90^\circ$ 间变化时，余弦值（余切值）随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）。

9、同角三角函数关系公式

$$(1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1; \quad (2) \tan A = \frac{1}{\cot A}; \quad (3) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

10. 一些特殊角的三角函数值

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

二、解直角三角形

由直角三角形中，除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形。

若直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 A、B、C，a、b、c 中除 $\angle C = 90^\circ$ 外，其余 5 个元素之间有关系：

$$(1) a^2 + b^2 = c^2; (2) \angle A + \angle B = 90^\circ;$$

$$(3) \sin A = \frac{a}{c}; \cos A = \frac{b}{c}; \tan A = \frac{a}{b}; \cot A = \frac{b}{a}$$

所以，只要知道其中的 2 个元素（至少有一个是边），就可以求出其余 3 个未知数。

例如 Rt△ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\angle A = 30^\circ$ ， $a = 5$ ，

$$\text{则由: } \frac{a}{c} = \sin A = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow c = 10$$

$$\frac{b}{c} = \sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = 5\sqrt{3}$$

$$A + B = 90^\circ \rightarrow B = 60^\circ$$

$$\therefore b = 5\sqrt{3}, c = 10, B = 60^\circ$$

三、应用举例

是实际问题中的解直角三角形，或者说用解直角三角形的方法解决实际问题。

例如一杆 AB 直立地面，从 D 点看杆顶 A，仰角为 60° ，从 C 点看杆顶 A，仰角为 30° （如图 5~2）若 CD 长为 10 米，求杆 AB 的高。

解：设 $AB = x$

$$\text{即 } \tan 60^\circ = \frac{x}{BD}, \quad \tan 30^\circ = \frac{x}{10 + BD},$$

$$\text{即 } \begin{cases} x = \sqrt{3}BD \\ \sqrt{3} = 10 + BD \end{cases}$$

$$\sqrt{3}x = 10 + \frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad 2x = 10\sqrt{3}, \quad \therefore x = 5\sqrt{3}$$

即杆高约 8.66 米，应用题中要注意：

(1) 仰角，俯角见图 5-3

(2) 跨度、中柱：如房屋顶人字架跨度为 AB，见图 5-4

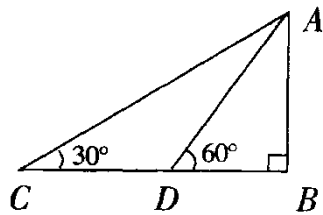


图 5-2

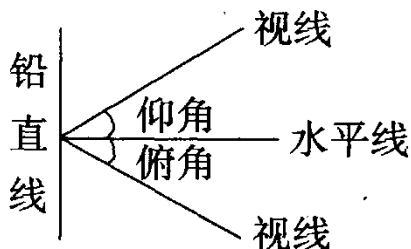


图 5-3

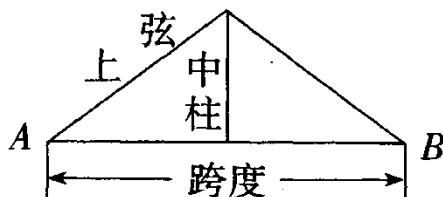


图 5-4

(3) 深度、燕尾角

如燕尾槽的深度，见图 5—5

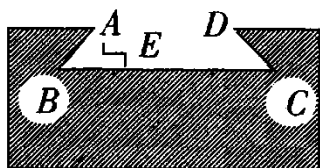


图 5-5

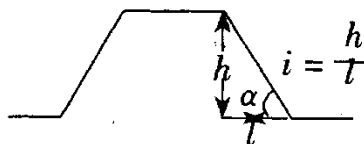


图 5-6

AE 是深度 AD 外口宽
 BC 里口宽 $\angle B$ 燕尾角

(4) 坡度、坡角

见图 5-6 坡度 $i=7$ 坡度的垂直高度 h 水平宽度 l ，

$$i = \frac{h}{l} = \tan \alpha (\alpha \text{ 叫坡角})$$

例题：

例 1、根据下列条件，解直角三角形。

① $a=10$ ， $\angle B=45^\circ$ ；② $a=3\sqrt{3}$ ， $c=6$ 。

例 2、在平地上一点 C ，测得山顶 A 的仰角为 30° ，向山沿直线前进 20 米到 D 处，再测得山顶 A 的仰角为 45° ，求山高 AB 。

分析：此题一方面可引导学生复习仰角、俯角的概念，同时，可引导学生加以分析：

如图 6-39，根据题意可得 $AB \perp BC$ ，得 $\angle ABC=90^\circ$ ， $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABC$ 都是直角三角形，且 $C、D、B$ 在同一直线上，由 $\angle ADB=45^\circ$ ， $AB=BD$ ， $CD=20$ 米，可得 $BC=20+AB$ ，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=30^\circ$ ，可得 AB 与 BC 之间的关系，因此山高 AB 可求。学生在分析此题时遇到的困难是：在 $Rt\triangle ABC$ 中和 $Rt\triangle ABD$ 中，都找不出一条已知边，

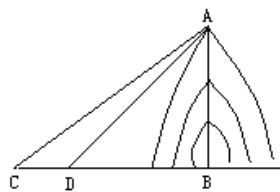


图 6-39

而题目中的已知条件 $CD=20$ 米又不会用.

解：略

例题 3 如图 6-40，水库的横截面是梯形，坝顶宽 6m，坝高 23m，斜坡 AB

的坡度 $i=1:\sqrt{3}$ ，斜坡 CD 的坡度 $i'=1:1$ ，求斜坡 AB 的长及坡角 α 和坝底宽 AD (精确到 0.1m).

分析：坡度问题是解直角三角形的一个重要应用，学生在解坡度问题时常遇到以下问题：

1. 对坡度概念不理解导致不会运用题目中的坡度条件；
2. 坡度问题计算量较大，学生易出错；
3. 常需添加辅助线将图形分割成直角三角形和矩形.

解：略

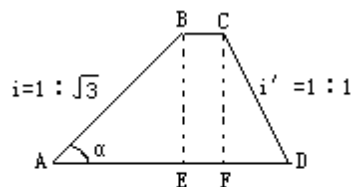


图 6-40

几何部分

第六章：圆

知识点：

一、圆

1、圆的有关性质

在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫圆，固定的端点 O 叫圆心，线段 OA 叫半径。

由圆的意义可知：

圆上各点到定点（圆心 O）的距离等于定长的点都在圆上。

就是说：圆是到定点的距离等于定长的点的集合，圆的内部可以看作是到圆心的距离小于半径的点的集合。

圆的外部可以看作是到圆心的距离大于半径的点的集合。连结圆上任意两点的线段叫做弦，经过圆心的弦叫直径。圆上任意

两点间的部分叫圆弧，简称弧。

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫半圆，大于半圆的弧叫优弧；小于半圆的弧叫劣弧。由弦及其所对的弧组成的圆形叫弓形。

圆心相同，半径不相等的两个圆叫同心圆。

能够重合的两个圆叫等圆。

同圆或等圆的半径相等。

在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫等弧。

二、过三点的圆

1、过三点的圆

过三点的圆的作法：利用中垂线找圆心

定理不在同一直线上的三个点确定一个圆。

经过三角形各顶点的圆叫三角形的外接圆，外接圆的圆心叫外心，这个三角形叫圆的内接三角形。

2、反证法

反证法的三个步骤：

①假设命题的结论不成立；

②从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

③由矛盾得出假设不正确，从而肯定命题的结论正确。

例如：求证三角形中最多只有一个角是钝角。

证明：设有两个以上是钝角

则两个钝角之和 $>180^\circ$

与三角形内角和等于 180° 矛盾。

$\therefore$ 不可能有二个以上是钝角。

即最多只能有一个是钝角。

三、垂直于弦的直径

圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴。

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧。

推理 1：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对两条弧。

弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧。

平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一个条弧。

推理 2：圆两条平行弦所夹的弧相等。

四、圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

圆是以圆心为对称中心的中心对称图形。

实际上，圆绕圆心旋转任意一个角度，都能够与原来的图形重合。

顶点是圆心的角叫圆心角，从圆心到弦的距离叫弦心距。

定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦心距相等。

推理：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中，有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等。

五、圆周角

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫圆周角。

推理 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等。

推理 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角； 90° 的圆周角所对的弦是直径。

推理 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。

由于以上的定理、推理，所添加辅助线往往是添加能构成直径上的圆周角的辅助线。

六、圆的内接四边形

多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫圆内接多边形，这个圆叫这个多边形的外接圆

定理：圆的内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角。

例如图 6—1，连 EF 后，可得：

$$\angle DEF = \angle B$$

$$\angle DEF + \angle A = 180^\circ$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\therefore BC \parallel DA$$

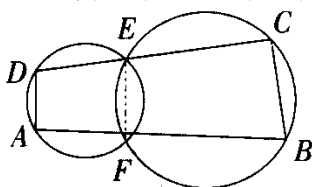


图 6-1

七、直线和圆的位置关系

1、直线和圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交，这时直线叫圆的割线

直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切，这时直线叫圆的切线，唯一的公共点叫切点。

直线和圆没有公共点时，叫直线和圆相离。

2、若圆的半径为 r ，圆心到直线的距离为 d ，则：

直线和圆相交 $\Leftrightarrow d < r$ ；直线和圆相切 $\Leftrightarrow d = r$ ；直线和圆相离 $\Leftrightarrow d > r$ ；直线和圆相交 $\Leftrightarrow d < r$

例如：图 6-2 中，直线与圆 O 相割，
有： $r > d$

图 6-3 中，直线与圆 O 相切， $r = d$

图 6-4 中，直线与圆 O 相离， $r < d$

八、切线的判定和性质

切线的判定：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径

推理 1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点。

推理 2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。

例如图 6-5 中， O 为圆心， AC 是切线，
 D 为切点。

$\angle B = 90^\circ$

则有 BC 是切线

OD 是半径

$OD \perp AC$

九、三角形的内切圆

要求会作图，使它和已知三角形的各边都相切

$\therefore$ 分角线上的点到角的两边距离相等。

$\therefore$ 两条分角线的交点就是圆心。

这样作出的圆是三角形的内切圆，其圆心叫内心，三角形叫圆的外切三角形。

和多边形各边都相切的圆叫多边形的内切圆，多边形叫圆的外切多边形。

十、切线长定理

经过圆外一点可作圆的两条切线。在经过圆外一点的圆的切线上，这点和切点之间的线段的长，叫这点到圆的切线长。

切线长定理从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等。圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角，如图 6-6

B 、 C 为切点， O 为圆心。

$AB = AC$ ， $\angle 1 = \angle 2$

十一、弦切角

顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫弦切角。

弦切角定理弦切角等于它所夹的弧对的圆周角。

推理如果两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角也相

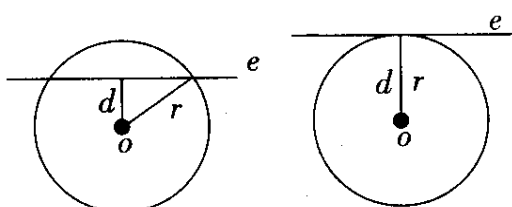


图 6-2

图 6-3

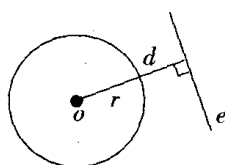


图 6-4

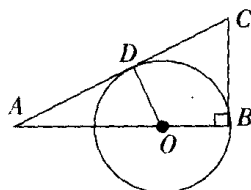


图 6-5

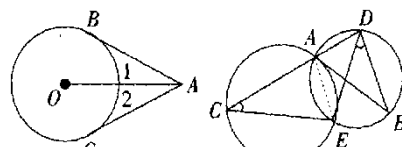


图 6-6

图 6-7

等。

例如图 6-7, AB 为切线,

则有: $\angle C = \angle BAE$, $\angle BAE = \angle D$

$\therefore \angle C = \angle D$

十二、和圆有关的比例线段

相交弦定理: 圆内的两条相交弦, 被交点分成的两条线段长的积相等。

推理: 如果弦与直径垂直相交, 那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项。

切割线定理: 从圆外一点引圆的切线和割线, 切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。

推理: 从圆外一点引两条割线, 这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等, 如图 6-8, 若 F 为切点

则有: $AF^2 = AH \cdot AC$, $AG \cdot AB = AF^2$

$EM \cdot MD = BM \cdot MG$

$CN \cdot NH = DN \cdot NE$

十三、圆和圆的位置关系如图 6-9

若连心线长为 d , 两圆的半径分别为 R , r , 则:

1、两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$;

2、两圆外切 $\Leftrightarrow d = R+r$;

3、两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r$ ($R > r$)

4、两圆内切 $\Leftrightarrow d = R-r$; ($R > r$)

5、两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r$ 。 ($R > r$)

定理相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦。

如图 6-10, O_1, O_2 为圆心,

则有: $AB \perp O_1O_2$, 且 AB 被 O_1O_2

平分

十四、两圆的公切线

和两个圆都相切的直线叫两圆的公切线, 两圆在公切线同旁

时, 叫外公切线, 在公切线两旁时, 叫内公切线, 公切线上两个切点的距离叫公切线的长。

如图 6-11, 若 A、B、C、D 为切点, 则 AB 为内公切线长, CD 为外公切线长

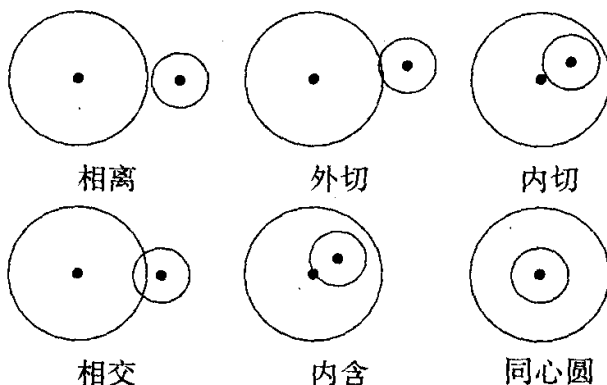


图 6-9

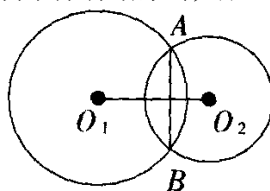


图 6-10

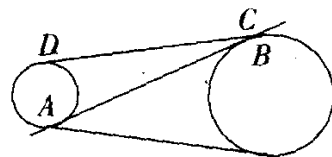


图 6-11

内外公切线中的重要直角三角形，如图 6-12， OO_1A 为直角三角形。

$$d^2 = (R-r)^2 + e^2 \text{ 为外公切线长,}$$

又如图 6-13， OO_1C 为直角三角形。

$$d^2 = (R+r)^2 + e'^2 \text{ 为内公切线长.}$$

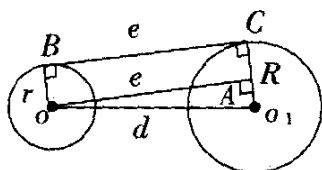


图 6-12

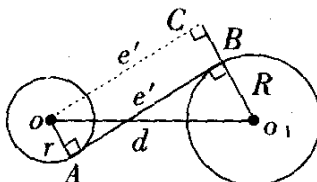


图 6-13

十五、相切在作图中的应用

生活、生产中常常需要由一条线（线段或弧）平滑地渡到另一条线上，通常称为圆弧连接，简称连接，连接时，线段与圆弧，圆弧与圆弧在连接外相切，如图 6-14

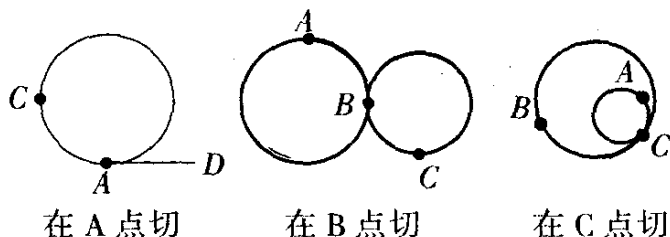


图 6-14

十六、正多边形和圆

各边相等，各角也相等的多边形叫正多边形。

定理：把圆分成 n ($n > 3$) 等分：

- (1) 依次连结各分点所得的多边形是这个圆的内接正多边形；
- (2) 经过各分点作圆的切线，以相邻切线的交点为顶点的多边形是这个圆的外切正 n 边形。

定理：任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆。

正多边形的外接（或内切）圆的圆心叫正多边形的中心。外接圆的半径叫正多边形的半径，内切圆的半径叫正多边形的边心距。

正多边形各边所对的外接圆的圆心角都相等，叫正多边形的中心角。

正 n 边形的每个中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心。

若 n 为偶数，则正 n 边形又是中心对称图形，它的中心就是对称中心。

边数相同的正多边形相似，所以周长的比等于边长的比，面积的比等于边长平方的比。

十七、正多边形的有关计算

正 n 边形的每个内角都等于 $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$

定理：正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形。正多边形的有关计算都归结为解直角三角形的计算。

十八、画正多边形

1、用量角器等分圆

2、用尺规等分圆

正三、正六、正八、正四及其倍数（正多边形）。

正五边形的近似作法；

二十、圆周长、弧长

1、圆周长 $C=2\pi R$ ； 2、弧长 $L=\frac{n\pi R}{180}$

二十一、圆扇形，弓形的面积

1、圆面积： $S=\pi R^2$ ；

2、扇形面积：一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做扇形。

在半径为 R 的圆中，圆心角为 n° 的扇形面积 $S_{\text{扇形}}$ 的计算公

式为： $S_{\text{扇形}}=\frac{n\pi R^2}{360}$

注意：因为扇形的弧长 $L=\frac{n\pi R}{180}$ 。所以扇形的面积公式又可

写为 $S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}LR$

（3）弓形的面积

由弦及其所对的弧组成的圆形叫做弓形。

弓形面积可以在计算扇形面积和三角形面积的基础上求得。如果弓形的弧是劣弧，则弓形面积等于扇形面积减去三角形面积。若弓形的弧是优弧，则弓形面积等于扇形面积加上三角形面积。

二十二、圆柱和圆锥的侧面展开图

1、圆柱的侧面展开图

圆柱可以看作是由一个矩形旋转得到的，如把矩形 ABCD 绕边 AB 旋转一周得到的图形是一个圆柱。（图 6—16）

AB 叫圆柱的轴，圆柱侧面上平行轴的线段 CD，C'D'，…都叫圆柱的母线。

圆柱的母线长都相等，等于圆柱的高。

圆柱的两个底面是平行的。

圆柱的侧面展开图是一个长方形，如图 6—17，其中 AB=高，AC=底面圆周长。

$$\therefore S_{\text{侧面}} = 2\pi Rh$$

圆柱的轴截面是长方形一边长为 h，一边长为 2R

R 是圆柱底半径，h 是圆柱的高。见图 6—8

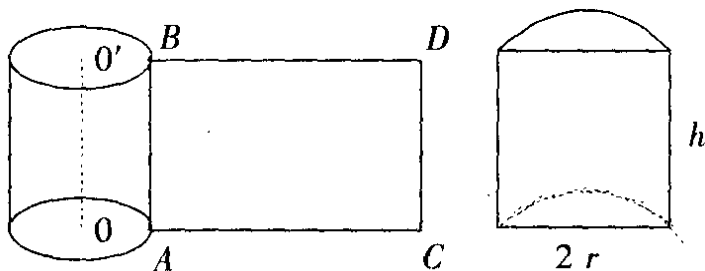


图 6—17

图 6—18

(2) 圆锥的侧面展开图

圆锥可以看作由一个直角三角形旋转得到。

如图 6—19，把 Rt△OAS 绕直线 SO 旋转一周得到的图形就是圆锥。

旋转轴 SO 叫圆锥的轴，连通过底面圆的圆心，且垂直底面。

连结圆锥顶点和底面圆的任意一点的 SA、SA'、…都叫圆锥的母线，母线长都相等。

圆锥的侧面展开图如图 6—19 是一个扇形 SAB

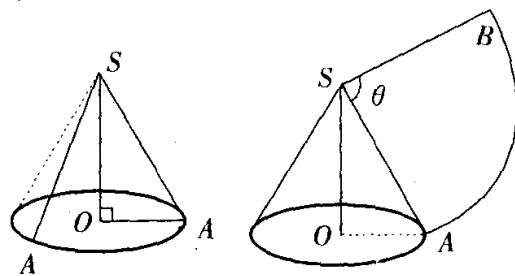


图 6—19

图 6—20

半径是母线长，AB 是 $2\pi R$ 。（底面的周长），所以圆锥侧面积为 $S_{\text{侧面}} = \pi RL$

例题：

例 1、如图 7.2-1，AB 是 $\odot O$ 的直径， $AD \perp CD$, $BC \perp CD$, 且 $AD+BC=AB$,

1、求证： $\odot O$ 与 CD 相切；

2、若 $CD=3$ ，求 $AD \cdot BC$.

[特色] 本题来源于教材，主要考查切线的判定方法及相似三角形的知识.

[解答] (1) 过 O 点作 $OE \perp CD$ 于 E.

$\because AD \perp CD, \quad BC \perp CD, \quad \therefore AD \parallel OE$
 $\parallel BC,$

又 $\because AO=BO, \quad \therefore DE=CE,$

$\therefore OE = \frac{1}{2} (AD+BC).$ 而 $AB=AD+BC,$

$\therefore OE=OA, \quad \text{而 } OE \perp CD, \quad \therefore \odot O \text{ 与 } CD \text{ 相切}.$

(2) 连结 AE、BE, $\because \odot O$ 与 CD 相切,

$\therefore OE \perp CD, \quad \angle BAE = \angle BEC. \quad \text{而 } \angle BAE = \angle OEA,$
 $\angle OEA + \angle DEA = 90^\circ,$

$\therefore \angle DEA + \angle BEC = 90^\circ. \quad \text{又 } \because AD \perp CD, \quad \therefore \angle$

$DEA + \angle DAE = 90^\circ,$

$\therefore \angle DAE = \angle BEC, \quad \therefore \triangle AED \sim \triangle EBC,$

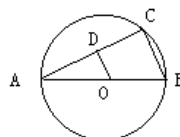
$\therefore AD \cdot EC = DE \cdot BC, \quad \text{即 } AD \cdot BC = DE \cdot EC = \frac{1}{2} CD^2$

$= \frac{9}{4}.$

例 2、如图 7.1-2. 已知, AB 为 $\odot O$ 的直径, D 为弦 AC 的中点, $BC=6\text{cm}$, 则 $OD=$ _____.

[特色] 以上几道中考题均为直接运用圆的有关性质解题.

[解答] 由三角形的中位线定理知 $OD = \frac{1}{2} BC$



(图 7.1-2)

例 3、如图 7.3-1 $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, $\angle C=90^\circ$, AO 的延长线交 BC 于点 D, $AC=4$, $CD=1$, 则 $\odot O$ 的半径等于 ().

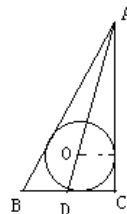


图 73-1

A、 $\frac{4}{5}$ B、 $\frac{5}{4}$ C、 $\frac{3}{4}$ D、 $\frac{5}{6}$

[特色] 本题考查内心的性质.

[解答] 过点 O 半径 OE, 则 $OE \parallel CD$, $AE : AC = OE : CD$, 设半径为 R, 则 $(4-R) : 4 = R : 1$, 解之得 $R = \frac{4}{5}$, 选 A.

例 4、圆内接四边形 ABCD, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数的比是 1 : 2 : 3, 则这个四边形的最大角是_____.

[特色] 运用圆内接四边形的性质进行简单计算.

[解答] 设 $A=x$, 则 $\angle B=2x$, $\angle C=3x$. $\because \angle A + \angle C = 180^\circ$,

$$\therefore x + 3x = 180^\circ, \quad \therefore x = 45^\circ.$$

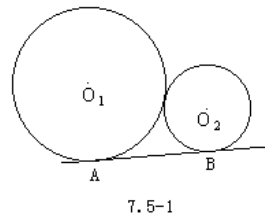
$$\therefore \angle A = 45^\circ, \quad \angle B = 90^\circ, \quad \angle C = 135^\circ, \quad \angle D = 90^\circ.$$

$\therefore$ 最大角为 135° .

例 5、如图 7.5-1, O_1 和 O_2 外切于点 C, 直线 AB

分别外切 $\odot O_1$ 于 A, $\odot O_2$ 于 B, $\odot O_2$ 的半径为 1, $AB = 2\sqrt{2}$,

则 $\odot O_1$ 的半径是_____.



[特色] 以上各题都是圆与圆的位置关系中常见的基本题型, 着眼于考查学生对两圆的位置关系的理解及运用.

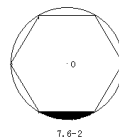
[解答] (1) 选 B, 利用两圆相交, 连心线垂直平分公共弦, 再根据勾股定理可求得.

例 6、将两边长分别为 4cm 和 6cm 的矩形以其一边所在的直线为轴旋转一周, 所得圆柱的表面积为_____ cm^2 .

[特色] 考查圆柱的表面积的计算, 着眼于考查学生思维的全面性.

[解答] 以边长为 4cm 作母线所得到的圆柱的表面积为 $80\pi \text{cm}^2$; 以边长为 6cm 作母线所得到的圆柱的表面积为 $120\pi \text{cm}^2$.

例 7、如图 7.6-2, 正六边形内接于半径为 1 的圆, 其中



阴影部分的面积是_____.

[特色] 考查学生对基本概念的理解以及基本运算能力.

[解答] 答案: $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. 作半径, 用扇形的面积减去三角形的面积.