

2024 年 **高考数学** 押题密卷 03(新高考 新题型)

【本试卷共 19 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟】

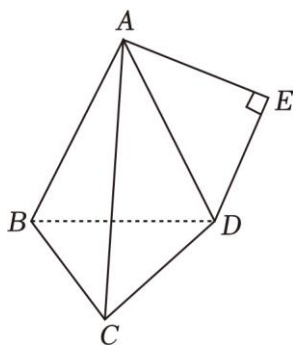
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (2024•松江区二模) 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{1, 2\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 2, 4\}$
2. (2024•南宁模拟) 已知复数 z 在复平面内对应的点为 (a, b) , 且 $|z+i|=4$, 则 ()
A. $a^2 + (b+1)^2 = 4$ B. $a^2 + (b+1)^2 = 16$
C. $(a+1)^2 + b^2 = 4$ D. $(a+1)^2 + b^2 = 16$
3. (2024•榆林三模) 设 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 下面为真命题的是 ()
A. 若 $\alpha // \beta$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, 则 $a // b$
B. 对于空间中的直线 l , 若 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $l \perp a$, $l \perp b$, 则 $l \perp \alpha$
C. 若直线 a 上存在两点到平面 α 的距离相等, 则 $a // \alpha$
D. 若 $a // \alpha$, $a \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
4. (2024•渭南二模) 已知平面向量 $\vec{a} = (2\cos\alpha, -1)$, $\vec{b} = (\cos\alpha, 1)$, 其中 $\alpha \in (0, \pi)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\alpha =$ ()
A. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ B. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$
C. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ D. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

5. (2024•聊城模拟) 点 P 在抛物线 $y^2=8x$ 上, 若点 P 到点 $(2, 0)$ 的距离为 6, 则点 P 到 y 轴的距离为 ()
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
6. (2024•鄂阳区三模) 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1+a_4+a_7=2$, $a_2+a_5+a_8=4$, 则 $S_9=($)
- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18
7. (2024•商洛模拟) 已知函数 $f(x)=2x\ln x-ax^2$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $2x_1+f(x_2) > 2x_2+f(x_1)$, 则实数 a 的取值范围为 ()
- A. $[\frac{1}{2e}, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$
8. (2024•合肥模拟) 如图, 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2, 点 E 在四面体 $ABCD$ 外侧, 且 $\triangle AED$ 是以 E 为直角顶点的等腰直角三角形. 现以 AD 为轴, 点 E 绕 AD 旋转一周, 当三棱锥 $E-BCD$ 的体积最小时, 直线 CE 与平面 BCD 所成角的正弦值的平方为 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{2-\sqrt{2}}{12}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. (2024•晋城二模) 水稻产量是由单位面积上的穗数、每穗粒数（每穗颖花数）、成粒率和粒重四个基本因素构成. 某实验基地有两块面积相等的试验田, 在种植环境相同的条件下, 这两块试验田分别种植了甲、乙两种水稻, 连续试验 5 次, 水稻的产量如下:

甲 (单位: kg)	250	240	240	200	270
乙 (单位: kg)	250	210	280	240	220

则下列说法正确的是 ()

- A. 甲种水稻产量的极差为 70
- B. 乙种水稻产量的中位数为 240
- C. 甲种水稻产量的平均数大于乙种水稻产量的平均数
- D. 甲种水稻产量的方差小于乙种水稻产量的方差

10. (2024•河北模拟) 已知直线 $l: x+my-m+2=0$, 圆 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=5$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 直线 l 恒过定点 $(-2, 1)$
- B. 直线 l 与圆 C 相交
- C. 当直线 l 平分圆 C 时, $m=-3$
- D. 当点 C 到直线 l 距离最大值时, $m=\frac{1}{3}$

11. (2024•贵池区校级一模) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 是侧面 ABB_1A_1 内的一个动点, 三棱锥 $P-BC_1D$ 的所有顶点均在球 O 的球面上, 则 ()

- A. 平面 $PA_1C \perp$ 平面 BC_1D
- B. 点 P 到平面 BC_1D 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. 当点 P 在线段 AB_1 上时, 异面直线 AP 与 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$
- D. 当三棱锥 $P-BC_1D$ 的体积最大时, 球 O 的表面积为 2π

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. (2024•丰台区二模) 已知函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_2(x+1)$, 那么 $f(g(0))$ =_____.

13. (2024•赣州模拟) $(x^2+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^7$ 展开式中的常数项为_____.

14. (2024•宁波模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中, 定义 $d(A, B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点间的“曼哈顿距离”. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2}+y^2=1$, 点 P, Q, R 在椭圆 C 上, $PQ \perp x$ 轴. 点 M, N 满足 $\vec{RM}=\vec{MP}, \vec{PN}=2\vec{NQ}$. 若直线 MQ 与 NR 的交点在 x 轴上, 则 $d(R, Q)$ 的最大值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) (2024•新余二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)\sin B$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , $a=3$, $c=4$, 求 BD 的长.

16. (15 分) (2024•广州二模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{2n+1}=2a_n+2$, 且 $\{\frac{S_n}{n+1}\}$ 为等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 $2^{\frac{a_n}{2}}$ 与 $2^{\frac{a_{n+1}}{2}}$ 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n ($d_n>0$) 的等差数列, 记数列 $\{\frac{1}{d_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n<3$.

17. (15 分) (2024•聊城模拟) 随着互联网的普及、大数据的驱动, 线上线下相结合的新零售时代已全面开启, 新零售背景下, 即时配送行业稳定快速增长. 某即时配送公司为更好地了解客户需求, 优化自身服务, 提高客户满意度, 在其 A, B 两个分公司的客户中各随机抽取 10 位客户进行了满意度评分调查 (满分 100 分), 评分结果如下:

分公司 A : 66, 80, 72, 79, 80, 78, 87, 86, 91, 91.

分公司 B : 62, 77, 82, 70, 73, 86, 85, 94, 92, 89.

(1) 求抽取的这 20 位客户评分的第一四分位数;

(2) 规定评分在 75 分以下的为不满意, 从上述不满意的客户中随机抽取 3 人继续沟通不满意的原因及改进建议, 设被抽到的 3 人中分公司 B 的客户人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

18. (17 分) (2024•辽宁模拟) 已知 $f(x) = (x-1)e^x + \frac{1}{2}ax^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a>0$ 时, 证明: $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1+x_2<0$.

19. (17 分) (2024•永州三模) 已知 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上, 动点 N 满足 $\vec{ON} = \sqrt{3}\vec{OM}$, 记点 N 的轨迹为 E .

(1) 求轨迹 E 的方程;

(2) 在轨迹 E 上是否存在点 T , 使得过点 T 作椭圆 C 的两条切线互相垂直? 若存在, 求点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 过点 M 的直线 $y=kx+m$ ($m\neq 0$) 交轨迹 E 于 A, B 两点, 射线 OM 交轨迹 E 于

点 P ，射线 MO 交椭圆 C 于点 Q ，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值．

参考答案

一. 选择题（共 8 小题）

1. 【答案】D

【解答】解：∵集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$,

$$\therefore A \cap B = \{0, 2, 4\}.$$

故选：D.

2. 【答案】B

【解答】解：根据题意， $z = a + bi$,

$$\therefore |a + (b+1)i| = 4,$$

$$\therefore a^2 + (b+1)^2 = 16.$$

故选：B.

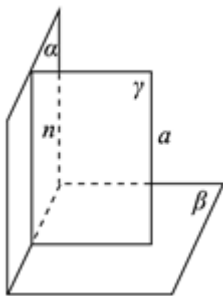
3. 【答案】D

【解答】解：若 $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, 则 $a \parallel b$ 或 a 与 b 异面，故 A 错误；

当 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $l \perp a$, $l \perp b$ 时，只有 a, b 相交时才有 $l \perp \alpha$, 故 B 错误；

若直线 a 上存在两点到平面 α 的距离相等，则 $a \parallel \alpha$ 或 a 与 α 相交，故 C 错误；

如图，



∵ $a \parallel \alpha$, 过 a 作平面 γ 和平面 α 交于 n , 则 $a \parallel n$, 而 $a \perp \beta$, 故 $n \perp \beta$,

又 $n \subset \alpha$, $\therefore \alpha \perp \beta$, 故 D 正确.

故选：D.

4. 【答案】B

【解答】解：∵ $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha = 0,$$

$$\because \alpha \in (0, \pi), \therefore 2\alpha \in (0, 2\pi),$$

$$\therefore 2\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } 2\alpha = \frac{3\pi}{2},$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

故选：B.

5. 【答案】A

【解答】解：由题意，抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为 $F(2, 0)$ ，准线方程为 $x=-2$ ，
设点 P 到 y 轴的距离为 d ，

由抛物线的定义得： $d+2=|PF|=6$ ，

所以 $d=4$ ，即点 P 到 y 轴的距离为 4.

故选：A.

6. 【答案】B

【解答】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $\frac{a_2+a_5+a_8}{a_1+a_4+a_7} = \frac{q(a_1+a_4+a_7)}{a_1+a_4+a_7} = q = 2$ ，

则 $a_3+a_6+a_9=2(a_2+a_5+a_8)=8$ ，

所以 $S_9=a_1+a_4+a_7+a_2+a_5+a_8+a_3+a_6+a_9=2+4+8=14$ ．

故选：B.

7. 【答案】C

【解答】解：不等式 $2x_1+f(x_2) > 2x_2+f(x_1)$ 等价于 $f(x_1) - 2x_1 < f(x_2) - 2x_2$ ，

令 $F(x) = f(x) - 2x$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，

根据题意对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，当 $x_1 > x_2$ 时， $F(x_1) < F(x_2)$ ，

所以函数 $F(x) = f(x) - 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $F'(x) = f'(x) - 2 = 2\ln x - 2ax \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

即 $\frac{\ln x}{x} \leq a$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立．

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，则 $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ，

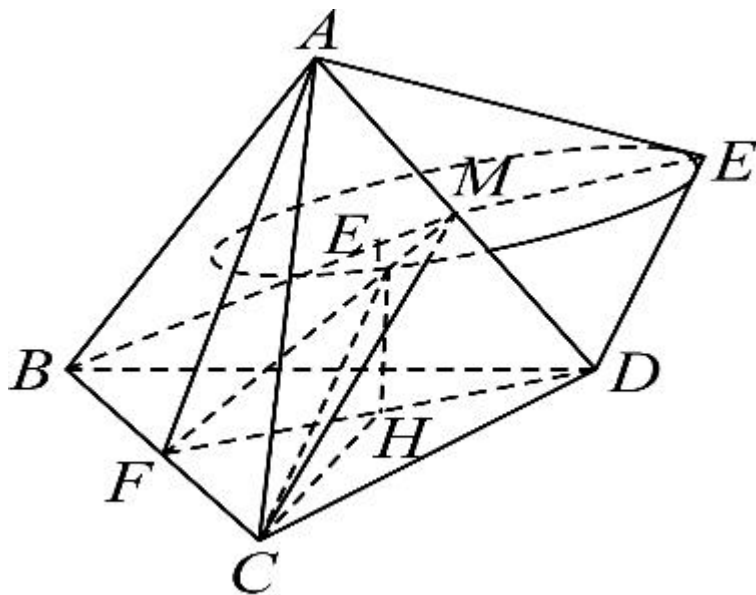
所以当 $x \in (0, e)$ 时， $g'(x) > 0$ $g(x)$ 单调递增，当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，
 $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$ ，所以 $a \geq \frac{1}{e}$ ．

故选：C.

8. 【答案】D

【解答】解：在正四面体 $ABCD$ 中，取 BC 中点 F ，连接 DF ， AF ，则 $DF=AF$ ，
取 AD 中点 M ，连接 FM ， EM ，则 $FM \perp AD$ ，
 $\triangle AED$ 是以 E 为直角顶点的等腰直角三角形，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，
则 $EM \perp AD$ ，且 $EM = \frac{1}{2}AD = 1$ ，



点 E 绕 AD 旋转一周，形成的图形为以 M 为圆心，以 $EM=1$ 为半径的圆，
设该圆与 MF 的交点为 E_1 ，当三棱锥 $E-BCD$ 的体积最小时，即 E 点到底面 BCD 的距离最小，

即此时 E 点即位于 E_1 处，

因为正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，则 $DF=AF=\sqrt{3}$ ，

又 AD 中点为 M ，则 $FM = \sqrt{AF^2 - AM^2} = \sqrt{2}$ ，则 $FE_1 = \sqrt{2} - 1$ ，

设点 E_1 在底面 BCD 上的射影为 H ，则 $E_1H = E_1F \sin \angle E_1FH = E_1F \times \frac{MD}{FD} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ ，

又 $MB=MC$ ， BC 中点为 F ，故 $MF \perp BC$ ，

故 $E_1C = \sqrt{FC^2 + E_1F^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ ，

由于点 E_1 在底面 BCD 上的射影为 H ，故 $\angle E_1CH$ 即为直线 CE_1 与平面 BCD 所成角，

$$\sin^2 \angle E_1CH = \frac{E_1H^2}{E_1C^2} = \frac{\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{4-2\sqrt{2}})^2} = \frac{2-\sqrt{2}}{12}.$$

故选：D.

二. 多选题（共3小题）

9. 【答案】ABD

【解答】解：对于选项A，甲种水稻产量的极差为 $270 - 200 = 70$ ，故A选项正确；

对于选项B，乙种水稻产量从小到大排列为210，220，240，250，280，所以乙种水稻产量的中位数为240，故选项B正确；

对于选项C，甲种水稻产量的平均数为 $\frac{250+240+240+200+270}{5} = 240$ ，乙种水稻产量的平均数为 $\frac{250+210+280+240+220}{5} = 240$ ，

所以甲种水稻产量的平均数等于乙种水稻产量的平均数，故C选项错误；

对于选项D，甲种水稻产量的方差为 $\frac{1}{5} \times [(250 - 240)^2 + (240 - 240)^2 + (240 - 240)^2 + (200 - 240)^2 + (270 - 240)^2] = 520$ ，

乙种水稻产量的方差为 $\frac{1}{5} \times [(250 - 240)^2 + (210 - 240)^2 + (280 - 240)^2 + (240 - 240)^2 + (220 - 240)^2] = 600$ ，

所以甲种水稻产量的方差小于乙种水稻产量的方差，故D选项正确.

故选：ABD.

10. 【答案】ACD

【解答】解：对于A， $l: x+my - m+2=0$ 即 $x+2+m(y-1)=0$ ，

令 $y-1=0$ ，有 $y=1$ ， $x=-2$ ，所以直线 l 恒过定点 $P(-2, 1)$ ，故A正确；

对于B，圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 的圆心 $C(1, 2)$ ， $r = \sqrt{5}$ ，

点 $C(1, 2)$ 到直线 $l: x+my - m+2=0$ 的距离为 $d = \frac{|m+3|}{\sqrt{1+m^2}}$ ，

从而 $d^2 - r^2 = \frac{(m+3)^2}{1+m^2} - 5 = \frac{-4m^2+6m+4}{1+m^2} = \frac{-2(m-2)(2m+1)}{1+m^2}$ ，

取 $m=2$ ，则此时有 $d=r$ ，故B错误；

对于C，当直线 l 平分圆 C 时，有点 $C(1, 2)$ 在直线 $l: x+my - m+2=0$ 上，

也就是说有 $1+2m - m+2=0$ 成立，解得 $m=-3$ ，故C正确；

对于D，点 C 到直线 l 距离满足 $d \leq |PC|$ ，等号成立当且仅当 $PC \perp l$ ，

而 PC 的斜率为 $k_1 = \frac{2-1}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$ ，

的角，即 $\angle BC_1D$ ，

因为 $\triangle BC_1D$ 为等边三角形，所以 $\angle BC_1D = \frac{\pi}{3}$ ，故 C 正确；

当三棱锥 $P - BC_1D$ 的体积最大时，点 P 到平面 BC_1D 的距离最大，

由 B 选项可知当点 P 与点 A_1 重合时，

三棱锥 $P - BC_1D$ 为正四面体 $A_1 - BC_1D$ ，且其棱长为 $\sqrt{2}$ ，其外接球即为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，

所以外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以球 O 的表面积为 $S = 4\pi \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3\pi$ ，故 D 错误.

故选：AC.

三. 填空题（共 3 小题）

12. 【答案】1.

【解答】解： $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = \log_2(x+1)$ ，

$$g(0) = \log_2(0+1) = 0,$$

$$\text{则 } f(g(0)) = f(0) = 2^0 = 1.$$

故答案为：1.

13. 【答案】630.

【解答】解： $(x^2 + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^7$ 表示 7 个 $(x^2 + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ 相乘，则常数项应为 1 个 x^2 ，2

个 $\frac{1}{x}$ ，2 个 y ，2 个 $\frac{1}{y}$ 相乘，

所以 $(x^2 + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^7$ 展开式中的常数项为 $C_7^1 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 630$.

故答案为：630.

14. 【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解答】解：设 $P(x_1, y_1)$ ， $R(x_2, y_2)$ ，由题意 $Q(x_1, -y_1)$ ， $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ，

不妨设点 P 位于第一象限，由 $\vec{PN} = 2\vec{NQ}$ 可得 $N(x_1, -\frac{y_1}{3})$ ，

设直线 MQ 与 NR 的交点为 $T(t, 0)$ ，则有 $\vec{QT} \parallel \vec{MQ}$ ， $\vec{RT} \parallel \vec{RN}$ ，

$$\vec{QT} = (t - x_1, y_1), \vec{MQ} = (\frac{x_1 - x_2}{2}, -\frac{3y_1 + y_2}{2}).$$

由 $\vec{QT} \parallel \vec{MQ}$ 可得 $(t - x_1)(-\frac{3y_1 + y_2}{2}) = y_1(\frac{x_1 - x_2}{2})$ ，整理得 $t = \frac{2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1}{3y_1 + y_2}$ ①，

$$\vec{RT} = (t - x_2, -y_2), \vec{RN} = (x_1 - x_2, -\frac{y_1}{3} - y_2),$$

$$\text{由 } \vec{RT} \parallel \vec{RN} \text{ 可得 } (t - x_2)(-\frac{y_1}{3} - y_2) = -y_2(x_1 - x_2), \text{ 整理得 } t = \frac{x_2 y_1 + 3x_1 y_2}{y_1 + 3y_2} \text{ ②},$$

$$\text{联立①②可得 } y_1^2(x_1 - x_2) = y_1 y_2(x_1 - x_2), \text{ 由题意 } x_1 \neq x_2, y_1 \neq 0, \text{ 所以 } y_1 = y_2,$$

$$\text{由椭圆的对称性可知 } x_1 = -x_2,$$

$$d(R, Q) = |x_1 - x_2| + |-y_1 - y_2| = 2|x_1| + 2|y_1|,$$

$$\text{因为 } \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1, \text{ 设 } x_1 = \sqrt{2}\cos\alpha, y_1 = \sin\alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$d(R, Q) = 2|x_1| + 2|y_1| = 2\sqrt{2}\cos\alpha + 2\sin\alpha = 2\sqrt{3}\sin(\alpha + \theta), \text{ 其中 } \tan\theta = \sqrt{2},$$

$$\text{所以当 } \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } d(R, Q) \text{ 取到最大值 } 2\sqrt{3}.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{3}.$$

四. 解答题（共 5 小题）

15. 【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$.

【解答】解：(1) 根据余弦定理, $a^2 + c^2 - b^2 = 2accosB$,

$$\text{由已知有 } S = \frac{1}{2} \cdot 2accosB \sin B = \frac{1}{2} \cdot ac \sin B, \text{ 则 } \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\triangle ABC \text{ 中, } B = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \angle ABC \text{ 的平分线交 } AC \text{ 于点 } D, a=3, c=4,$$

$$\text{则 } \frac{AD}{CD} = \frac{4}{3}, \text{ 又 } B = \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB = 13, b = \sqrt{13},$$

$$\text{则 } AD = \frac{4\sqrt{13}}{7}, S_{\triangle ABD} = \frac{4}{7} S_{\triangle ABC},$$

$$\text{可得 } \frac{1}{2} \cdot BD \cdot 4 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \sin \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } BD = \frac{12\sqrt{3}}{7}.$$

16. 【答案】(1) $a_n = 2n$; (2) 证明见解答.

【解答】解：(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 设公差为 d ,

$$\text{由 } a_{2n+1} = 2a_n + 2, \text{ 可得 } a_1 + 2nd = 2a_1 + 2(n-1)d + 2,$$

$$\text{即有 } a_1 = 2a_1 - 2d + 2, \text{ 即 } a_1 = 2d - 2,$$

$$\text{由 } \{\frac{S_n}{n+1}\} \text{ 为等差数列, 可得 } S_n = kn(n+1),$$

$$\text{即有 } a_1 = 2k, d = 2k, \text{ 解得 } k = 1,$$

$$\text{可得 } a_n = 2n;$$

$$(2) \text{ 证明: 在 } 2^{\frac{a_n}{2}} \text{ 与 } 2^{\frac{a_{n+1}}{2}} \text{ 之间插入 } n \text{ 个数, 使这 } n+2 \text{ 个数组成一个公差为 } d_n (d_n > 0)$$

的等差数列，

$$\text{可得 } d_n = \frac{2^{n+1} - 2^n}{n+2-1} = \frac{2^n}{n+1}, \quad \frac{1}{d_n} = (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$T_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2}T_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\text{上面两式相减可得 } \frac{1}{2}T_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

$$\text{则 } T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n},$$

$$\text{由 } \frac{n+3}{2^n} > 0, \text{ 可得 } T_n < 3.$$

17. 【答案】(1) 75 分；

(2) X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \frac{9}{5}.$$

【解答】解：(1) 将抽取的这 20 位客户的评分从小到大排列为：62，66，70，72，73，77，78，79，80，80，82，85，86，86，87，89，91，91，92，94，
因为 $20 \times 25\% = 5$ ，

所以第一四分位数为 $\frac{73+77}{2} = 75$ （分）；

(2) 由已知得分公司 A 中 75 分以下的有 66 分，72 分；分公司 B 中 75 分以下的有 62 分，70 分，73 分，

所以上述不满意的客户共 5 人，其中分公司 A 中 2 人，分公司 B 中 3 人，

X 的所有可能取值为 1，2，3，

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{1 \times 3}{10} = \frac{3}{10}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{3}{5}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
-----	---	---	---

P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$
-----	----------------	---------------	----------------

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}.$$

18. 【答案】(1) ① $a \geq 0$, 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
 ② $-1 < a < 0$, 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 单调递增, 在 $(\ln(-a), 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
 ③ $a = -1$, 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
 ④ $a < -1$, 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, \ln(-a))$ 单调递减, 在 $(\ln(-a), +\infty)$ 单调递增;

(2) 证明过程见解析.

【解答】解: (1) $f(x) = x(e^x + a)$,

① 当 $a \geq 0$ 时, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

② 当 $-1 < a < 0$ 时, $\ln(-a) < 0$, 令 $f(x) > 0$, 解得 $x < \ln(-a)$ 或 $x > 0$,

令 $f(x) < 0$, 解得 $\ln(-a) < x < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 单调递增, 在 $(\ln(-a), 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

③ 当 $a = -1$ 时, $f(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

④ 当 $a < -1$ 时, $\ln(-a) > 0$, 令 $f(x) > 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x > \ln(-a)$,

令 $f(x) < 0$, 解得 $0 < x < \ln(-a)$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, \ln(-a))$ 单调递减, 在 $(\ln(-a), +\infty)$ 单调递增;

证明: (2) 由 (1) 知当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因为 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = \frac{1}{2}a > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有一个零点,

令 $g(x) = (x-1)e^x$, 则 $g'(x) = xe^x$,

当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) \geq g(0) = -1$,

当 $x < 0$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}ax^2 - 1$, 取 $x_0 = -\sqrt{\frac{2}{a}} < 0$, 取 $f(x_0) > \frac{1}{2}ax_0^2 - 1 = 0$,

所以在 $(-\sqrt{\frac{2}{a}}, 0)$ 有一个零点，所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1, x_2 ，

不妨设 $x_1 < 0 < x_2$ ，设 $h(x) = f(x) - f(-x)$ ， $x < 0$ ，

$$h'(x) = f'(x) + f'(-x) = x(e^x + a) - x(e^{-x} + a) = x(e^x - e^{-x}),$$

当 $x < 0$ 时， $e^x - e^{-x} < 0$ ， $h'(x) > 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增，

因为 $x_1 < 0$ ，所以 $h(x_1) < h(0) = 0$ ，所以 $f(x_1) - f(-x_1) < 0$ ，

因为 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ，所以 $f(x_2) < f(-x_1)$ ，

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $-x_1 > 0$ ， $x_2 > 0$ ，所以 $x_2 < -x_1$ ，所以 $x_2 + x_1 < 0$ 。

19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 存在点 T 满足条件，此时点 T 的坐标为 $(0, \sqrt{3})$ 或 $(0, -\sqrt{3})$;

(3) $2(\sqrt{3} + 1)$ 。

【解答】解：(1) 不妨设 $M(x_0, y_0)$ ， $N(x, y)$ ，

此时 $\vec{ON} = (x, y)$ ， $\vec{OM} = (x_0, y_0)$ ，

因为 $\vec{ON} = \sqrt{3}\vec{OM}$ ，

所以 $(x, y) = \sqrt{3}(x_0, y_0)$ ，

解得 $x_0 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ， $y_0 = \frac{y}{\sqrt{3}}$ ，

因为点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上，

所以 $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$ ，

整理得 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，

则点 N 的轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ；

(2) 当两条切线的斜率存在时，

不妨设过点 $T(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ，

联立 $\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y 并整理 $(1 + 2k^2)x^2 + 4k(y_0 - kx_0)x + 2(y_0 - kx_0)^2 - 2 = 0$ ，

此时 $\Delta = 8[1 + 2k^2 - (y_0 - kx_0)^2] = 0$ ，

整理得 $(x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$ ，

不妨设两条切线的斜率分别为 k_1, k_2 ,

可得 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 2} = -1$, 即 $x_0^2 + y_0^2 = 3$,

因为点 T 在 $\frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ 上,

解得 $x_0 = 0, y_0 = \pm\sqrt{3}$,

此时 $T(0, \sqrt{3})$ 或 $T(0, -\sqrt{3})$,

当两条切线的斜率有一条不存在时, 此时不符合题意;

综上得, 存在点 T 满足条件, 此时点 T 的坐标为 $(0, \sqrt{3})$ 或 $(0, -\sqrt{3})$;

(3) 不妨设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$,

此时 $\Delta = 16k^2m^2 - 4(1+2k^2)(2m^2 - 6) = 8(6k^2 + 3 - m^2) > 0$,

解得 $m^2 < 3 + 6k^2$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2-6}{1+2k^2}$,

所以 $|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{6k^2+3-m^2}}{1+2k^2}$,

因为直线 $y=kx+m$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0, m)$,

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_0 = \frac{1}{2}|m| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6k^2+3-m^2}|m|}{1+2k^2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(6k^2+3-m^2) \cdot m^2}}{1+2k^2} =$

$$\sqrt{2} \sqrt{\left(3 - \frac{m^2}{1+2k^2}\right) \cdot \frac{m^2}{1+2k^2}},$$

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$,

此时 $\Delta = 8(1+2k^2 - m^2) \geq 0$,

解得 $m^2 \leq 1 + 2k^2$,

不妨令 $\frac{m^2}{1+2k^2} = t$,

因为 $m^2 < 3 + 6k^2, m^2 \leq 1 + 2k^2$,

所以 $0 < t \leq 1$,

此时 $S_0 = \sqrt{2}\sqrt{(3-t)t} = \sqrt{2}\sqrt{-t^2 + 3t}$,

则 $S_0 \leq 2$,

当且仅当 $t=1$, 即 $m^2=1+2k^2$ 时, S_0 取得最大值, 最大值为 2,

因为 $\vec{OP} = \sqrt{3}\vec{OM}$,

所以 $\triangle ABP$ 的面积 $S_1 = (\sqrt{3} - 1)S_0$,

易知 $\triangle ABQ$ 面积 $S_2 = 2S_0$,

则四边形 $APBQ$ 的面积 $S = S_1 + S_2 = (\sqrt{3} + 1)S_0$,

故四边形 $APBQ$ 面积的最大值为 $2(\sqrt{3} + 1)$.