2022-2023学年江苏省苏州市常熟中学高一（下）期初数学试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）cos120°是（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．（5分）由英文单词“*book*”中的字母构成的集合的子集个数为（　　）

A．3　　B．6　　C．8　　D．16

3．（5分）已知$x\in\mathbf{R}$，那么“$0<x<2$”是“$\frac{1}{x}>1$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

4．（5分）下列函数中，既是偶函数，又在（0，+∞）上单调递增的是（　　）

A．$y=\cos x$　　B．$y=|\ln x|$　　C．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　D．$y=2^{|x|}$

5．（5分）若α为第二象限角，则一定成立的是（　　）

A．cos2α>0　　B．cos2α<0　　C．sin2α>0　　D．sin2α<0

6．（5分）已知$P(\tan\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3})$为角α终边上一点，则$\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

7．（5分）已知函数$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$在区间$[-a,\ a]$上单调递增，则实数$a$的最大值是（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

8．（5分）设函数$f(x)$的定义域为[0，3)，满足$f(x+1)=2f(x)+\frac{1}{4}$，且当$x\in[0,1)$时，$f(x)=x(1-x)$．则不等式$f(x)\geqslant\frac{5}{8}$的解集是（　　）

A．$[\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}]\cup[2,\ 3)$　　B．$[\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}]\cup[2,\ 3)$

C．$[\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}]\cup(2,\ 3)$　　D．$[\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}]\cup(2,\ 3)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（5 分）在△*ABC* 中，下列关系式成立的是（　　）

A．sin（*A*+*B*）＝sin*C*　　　　B．$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

C．cos（*A*+*B*）＝cos*C*　　　　D．$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

（多选）10．（5 分）下列不等式成立的是（　　）

A．cos225°＞sin390°　　　　B．$(\frac{1}{2})^{0.3}>(\frac{1}{3})^{0.3}$

C．$\tan(-\frac{\pi}{5})>\tan(-\frac{3\pi}{7})$　　　　D．$1.7^{0.3}<0.9^{3.1}$

（多选）11．（5 分）已知函数 *f*（*x*）＝sin|*x*|+|sin*x*|，则（　　）

A．*f*（*x*）是偶函数

B．*f*（*x*）在区间 $[\frac{\pi}{2},\ \pi]$上单调递减

C．*f*（*x*）在区间[﹣π，π]上有四个零点

D．*f*（*x*）的值域为[0，2]

（多选）12．（5 分）已知集合 *A*＝{﹣1，1}，非空集合 $B=\{x|x^3+ax^2+bx+c=0\}$，下列条件能够使得 *B*⊆*A* 的是（　　）

A．*a*＝﹣3，*b*＝3，*c*＝﹣1

B．*a*＝﹣3，*b*＝﹣3，*c*＝1

C．*a*＝﹣1，*b*＝﹣1，*c*＝1

D．*a*+*b*+*c*+1＝0 且 $(a+1)^2+4c<0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）已知某扇形的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，面积为$\frac{\pi}{6}$，则该扇形的周长为 ______________________．

14．（5 分）写出一个非常数函数同时满足条件：①*f*（*x*+2）＝*f*（*x*），②*f*（1﹣*x*）＝*f*（1+*x*）．则 *f*（*x*）＝______________________．

15．（5 分）已知函数 *f*(*x*)＝|*lgx*|，(1)当 $a=f(\frac{1}{4})$，$b=f(2)$时，则实数 *a*，*b* 之间的大小关系是 __________；

（2）若 *m*＞*n*＞0，且 *f*（*m*）＝*f*（*n*），则 2*m*+*n* 的取值范围是 ____________．

16．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant m\\ -\frac{2}{3}x, & x>m\end{cases}$ 的值域为 **R**，侧实数 *m* 的取值范围

是 ________________________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）（1）已知 $10^m=2$，$10^n=3$，求 $10^{\frac{3m-2n}{2}}$ 的值；

（2）已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，求 a^2+a^{-2} 的值；

（3）计算：$(\frac{1}{2})^{\log_2 3}\times 4^{\frac{1}{2}}+\log_2 3\times\log_3 4-3^0$.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 取得最大值时自变量 x 的集合；

（2）记集合 $M=\{y|y=f(x)，x\in[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]\}$，集合 $N=\{x|\tan\frac{\pi x}{3}-\sqrt{3}\geqslant 0，x\in[0，\frac{3}{2})\}$，求 $M\cap \mathbf{N}$.

19.（12 分）已知 $f(x)=a+\frac{2}{2^x+1}$（$a\in\mathbf{R}$）为奇函数.

（1）求 a 的值及 $y=\frac{f(2x)+1}{f(x)+1}$ 的最大值；

（2）若关于 x 的不等式 $f(mx^2)+f(-mx-2)>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

20.（12 分）把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是 θ_1℃，空气的温度是 θ_0℃，那么 $t min$ 后物体的温度（单位：℃）可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$（$e$ 是自然对数的底数）求得，其中 k 是一个随着物体与空气接触状况而定的正常数．现有 65℃的物体，放在 15℃的空气中冷却，1min 以后物体的温度是 55℃.

（1）求 k 的值；

（2）若要将物体冷却到 35℃，求需要冷却的时间：再经多长时间，可以冷却至 25℃（精确到 1）？

（参考数据：$ln2\approx0.69$，$ln3\approx1.10$，$ln5\approx1.61$）

21.（12 分）已知函数 $f(x)=ln(x+1)-ln(1-x)$.

（1）判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明；

（2）若 $g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$，记 $h(x)=f(x)-g(x)$，求证：$h(x)$ 有且只有一个零点.

22.（12 分）已知函数 $f(\theta)=|\sin\theta-a|-\cos^2\theta$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(\theta)$ 的最值；

（2）求函数 $f(\theta)$ 的最小值 $h(a)$.

2022-2023 学年江苏省苏州市常熟中学高一（下）期初数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）cos120°是（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】*A*

【分析】利用诱导公式把要求的式子化为－cos60°，从而求得结果．

【解答】解：cos120°＝cos（180°－60°）＝－cos60°＝$-\frac{1}{2}$，

故选：*A*．

2．（5 分）由英文单词"*book*"中的字母构成的集合的子集个数为（　　）

A．3　　B．6　　C．8　　D．16

【答案】*C*

【分析】首先写出该集合，即可判断集合的元素个数，根据含有 n 个元素的集合的子集个数为 2^n 个计算可得．

【解答】解：由英文单词"*book*"中的字母构成的集合为$\{b，o，k\}$，集合中含有 3 个元素，

所以该集合的子集为 $2^3=8$ 个．

故选：*C*．

3．（5 分）已知 $x\in\mathbf{R}$，那么"$0<x<2$"是"$\frac{1}{x}>1$"的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

【答案】*B*

【分析】判断"$0<x<2$"和"$\frac{1}{x}>1$"之间的逻辑推理关系，即可判断出答案．

【解答】解：取 $x=\frac{3}{2}$，满足 $0<x<2$，但$\frac{1}{x}=\frac{2}{3}<1$，推不出$\frac{1}{x}>1$，

当$\frac{1}{x}>1$时，则 $0<x<1$，则必有 $0<x<2$ 成立，

故“$0<x<2$”是“$\frac{1}{x}>1$”的必要不充分条件，

故选：*B*.

4.（5 分）下列函数中，既是偶函数，又在（0，+∞）上单调递增的是（　　）

A．$y=\cos x$　　　B．$y=|\ln x|$　　　C．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　　D．$y=2^{|x|}$

【答案】*D*

【分析】根据基本初等函数的单调性与奇偶性判断即可．

【解答】解：对于 *A*：$y=\cos x$ 为偶函数，但是函数在（0，+∞）上不具有单调性，故 *A* 错误；

对于 *B*：$y=|\ln x|$定义域为（0，+∞），函数为非奇非偶函数，故 *B* 错误；

对于 *C*：$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$定义域为[0，+∞)，为非奇非偶函数，故 *C* 错误；

对于 *D*：$y=f(x)=2^{|x|}=\begin{cases}2^x, & x\geqslant 0\\ 2^{-x}, & x<0\end{cases}$，且 $f(-x)=2^{|-x|}=f(x)$，故 $y=2^{|x|}$为偶函数，

当 $x\in(0,+\infty)$，$y=2^x$ 函数单调递增，符合题意，故 *D* 正确；

故选：*D*.

5.（5 分）若 α 为第二象限角，则一定成立的是（　　）

A．$\cos2\alpha>0$　　　B．$\cos2\alpha<0$　　　C．$\sin2\alpha>0$　　　D．$\sin2\alpha<0$

【答案】*D*

【分析】由题意，可得可得 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，由此利用二倍角公式，可得结论．

【解答】解：由 α 为第二象限角，可得 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，∴$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$，

故选：*D*.

6.（5 分）已知$P(\tan\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3})$为角 α 终边上一点，则$\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{1}{5}$　　　C．$-\frac{1}{5}$　　　D．$\frac{3}{5}$

【答案】*B*

【分析】根据特殊角的三角函数值得到 *P* 点坐标，由三角函数的定义求出 $\tan\alpha$，再由诱导公式化简 $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$，最后根据同角三角函数的基本关系将弦化切，代入计算可得．

【解答】解：因为 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $P(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{-\tan\alpha+1}{2+\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$.

故选：*B*.

7.（5 分）已知函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 在区间[﹣*a*，*a*]上单调递增，则实数 *a* 的最大值是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

【答案】*A*

【分析】根据 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的单调区间可求.

【解答】解：令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$.

所以 *f*（*x*）的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi]$，$k\in Z$.

又 *f*（*x*）在区间[﹣*a*，*a*]上单调递增，

∴ $[-a,\ a]\subseteq[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi]$，$k\in Z$，

∴ $-\frac{\pi}{4}\leqslant -a<0$，即 $0<a\leqslant\frac{\pi}{4}$，则实数 *a* 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$.

故选：*A*.

8.（5 分）设函数 *f*（*x*）的定义域为[0，3)，满足 $f(x+1)=2f(x)+\frac{1}{4}$，且当 *x*∈[0，1）时，*f*（*x*）=*x*（1﹣*x*）. 则不等式 $f(x)\geqslant\frac{5}{8}$ 的解集是（　　）

A. $[\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}]\cup[2,\ 3)$　　B. $[\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}]\cup[2,\ 3)$

C. $[\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}]\cup(2,\ 3)$　　D. $[\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}]\cup(2,\ 3)$

【答案】*A*

【分析】分 *x*∈[0，1)，*x*∈[1，2）和 *x*∈[2，3）进行分类讨论，即可求解.

【解答】解：当 *x*∈[0，1)，$f(x)=x(1-x)\geqslant\frac{5}{8}$，解得 *x* 无实数解，

当 *x*∈[1，2)，*x*﹣1∈[0，1)，则由 $f(x+1)=2f(x)+\frac{1}{4}$ 可得 $f(x)=2f(x-1)+\frac{1}{4}=2(x-1)(2-x)+\frac{1}{4}$，

令$2(x-1)(2-x)+\frac{1}{4}\geqslant\frac{5}{8}$，整理得 $16x^2-48x+35\leqslant0$，

解得$\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7}{4}$，

当 $x\in[2，3)$，$x-1\in[1，2)$，

则由$f(x+1)=2f(x)+\frac{1}{4}$可得

$f(x)=2f(x-1)+\frac{1}{4}=2[2(x-2)(3-x)+\frac{1}{4}]+\frac{1}{4}=4(x-2)(3-x)+\frac{3}{4}=-4(x-\frac{5}{2})^2+\frac{7}{4}$，

因为 $x\in[2，3)$，所以$f(x)\in[\frac{3}{4}，\frac{7}{4}]$，所以$f(x)\geqslant\frac{5}{8}$恒成立，

综上所述，不等式$f(x)\geqslant\frac{5}{8}$的解集是$[\frac{5}{4}，\frac{7}{4}]\cup[2，3)$．

故选：*A*．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（5 分）在△*ABC* 中，下列关系式成立的是（　　）

A．$\sin(A+B)=\sin C$　　　B．$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

C．$\cos(A+B)=\cos C$　　　D．$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

【答案】*AD*

【分析】由 $A+B+C=\pi$，$\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$及诱导公式逐一判断即可．

【解答】解：在△*ABC* 中，$A+B+C=\pi$，

则$\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$，

对于 *A*，$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

故 *A* 正确；

对于 *B*，$\sin\frac{A+B}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2}$，

故 *B* 错误；

对于 *C*，$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$，

故 *C* 错误；

对于 *D*，$\cos\frac{A+B}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\sin\frac{C}{2}$，

故 *D* 正确．

故选：*AD*．

（多选）10．（5 分）下列不等式成立的是（　　）

A．$\cos 225^\circ > \sin 390^\circ$　　B．$(\frac{1}{2})^{0.3} > (\frac{1}{3})^{0.3}$

C．$\tan(-\frac{\pi}{5}) > \tan(-\frac{3\pi}{7})$　　D．$1.7^{0.3} < 0.9^{3.1}$

【答案】*BC*

【分析】利用诱导公式及特殊角的三角函数值判断 *A*，利用幂函数的性质判断 *B*，根据正切函数的性质判断 *C*，利用指数函数的性质判断 *D*.

【解答】解：对于 *A*：因为 $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$，

所以 $\cos 225^\circ < \sin 390^\circ$，故 *A* 错误；

对于 *B*：因为 $y=x^{0.3}$ 在（0，+∞）上单调递增且 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$，

所以 $(\frac{1}{2})^{0.3} > (\frac{1}{3})^{0.3}$，故 *B* 正确；

对于 *C*：$y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{5} > -\frac{3\pi}{7} > -\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan(-\frac{\pi}{5}) > \tan(-\frac{3\pi}{7})$，故 *C* 正确；

对于 *D*：因为 $1.7^{0.3} > 1.7^0 = 1$，$0 < 0.9^{3.1} < 0.9^0 = 1$，

所以 $1.7^{0.3} > 0.9^{3.1}$，故 *D* 错误.

故选：*BC*.

（多选）11．（5 分）已知函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$，则（　　）

A．$f(x)$ 是偶函数

B．$f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减

C．$f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上有四个零点

D．$f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$

【答案】*ABD*

【分析】由定义判断 *A*；由正弦函数的单调性判断 *B*；由 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的零点结合奇偶性判断 *C*；讨论 $[0, +\infty)$ 的值域，结合奇偶性判断 *D*.

【解答】解：对于 *A*：其定义域为 **R**，$f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$，即函数 $f(x)$ 是偶函数，故 *A* 正确；

对于 B：$x\in[\frac{\pi}{2}, \pi]$时，$\sin x\geqslant 0$，$f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$，

由正弦函数的单调性可知，$f(x)$在区间$[\frac{\pi}{2}, \pi]$上单调递减，故 B 正确；

对于 C：$x\in[0, \pi]$时，$\sin x\geqslant 0$，$f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$，此时 $2\sin x=0$，可得 $x=0$ 或 $x=\pi$，

因为 $f(x)$是偶函数，所以 $f(x)$在区间$[-\pi, \pi]$上的零点为$-\pi$，0，π，故 C 错误；

对于 D：当 $2k\pi\leqslant x\leqslant \pi+2k\pi$，且 $k\geqslant 0$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\sin x\in[0, 1]$，$f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x\in[0, 2]$，

当 $\pi+2k\pi\leqslant x\leqslant 2\pi+2k\pi$，且 $k\geqslant 0$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\sin x\leqslant 0$，$f(x)=\sin x-\sin x=0$，

又 $f(x)$是偶函数，所以函数 $f(x)$的值域为$[0, 2]$，故 D 正确．

故选：ABD．

（多选）12．（5 分）已知集合 $A=\{-1, 1\}$，非空集合 $B=\{x|x^3+ax^2+bx+c=0\}$，下列条件能够使得 $B\subseteq A$ 的是（　　）

A．$a=-3$，$b=3$，$c=-1$

B．$a=-3$，$b=-3$，$c=1$

C．$a=-1$，$b=-1$，$c=1$

D．$a+b+c+1=0$ 且$(a+1)^2+4c<0$

【答案】ACD

【分析】把三次方程因式分解求根，即可化简集合 B，然后利用集合关系即可判断．

【解答】解：对于选项 A，方程 $x^3-3x^2+3x-1=0$，因式分解得$(x-1)^3=0$，

解得 $x=1$，所以 $B=\{1\}$，满足 $B\subseteq A$，所以选项 A 正确；

对于选项 B，方程 $x^3-3x^2-3x+1=0$，因式分解得$(x+1)(x^2-4x+1)=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=2\pm\sqrt{3}$，所以 $B=\{-1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$，不满足 $B\subseteq A$，所以选项 B 错误；

对于选项 C，方程 $x^3-x^2-x+1=0$，因式分解得$(x+1)(x-1)^2=0$，

解得 $x=\pm1$，所以 $B=\{-1, 1\}$，满足 $B\subseteq A$，所以选项 C 正确；

对于选项 D，因为 $a+b+c+1=0$，所以 $x=1$ 是方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的解，

所以方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 变形为$(x-1)[x^2+(a+1)x-c]=0$，

因为$(a+1)^2+4c<0$，所以方程 $x^2+(a+1)x-c=0$ 无解，

所以方程$(x-1)[x^2+(a+1)x-c]=0$ 有唯一解 $x=1$，

所以 $B=\{1\}$，满足 $B\subseteq A$，所以选项 D 正确．

故选：ACD．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.（5 分）已知某扇形的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，面积为$\frac{\pi}{6}$，则该扇形的周长为 __$\frac{\pi}{3}+2$__．

【答案】$\frac{\pi}{3}+2$．

【分析】由扇形面积公式求出扇形半径，根据扇形弧长公式求出弧长，即可得解．

【解答】解：设扇形的半径为 r，由扇形的面积公式得：$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}r^2=\frac{\pi}{6}$，解得 $r=1$，

该扇形的弧长为$\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}$，故该扇形的周长为$\frac{\pi}{3}+2$．

故答案为：$\frac{\pi}{3}+2$．

14.（5 分）写出一个非常数函数同时满足条件：①$f(x+2)=f(x)$，②$f(1-x)=f(1+x)$．则 $f(x)=$ __$\cos\pi x$（答案不唯一）__．

【答案】$\cos\pi x$（答案不唯一）．

【分析】根据函数所满足的周期性、对称性写出满足条件的函数即可．

【解答】解：因为 $f(x+2)=f(x)$，$f(1-x)=f(1+x)$，

所以函数周期 $T=2$，函数对称轴为 $x=1$，

故可取函数 $f(x)=\cos\pi x$，

故答案为：$\cos\pi x$（答案不唯一）．

15.（5 分）已知函数 $f(x)=|lgx|$，（1）当 $a=f(\frac{1}{4})$，$b=f(2)$时，则实数 a，b 之间的大小关系是 __$a>b$__；（2）若 $m>n>0$，且 $f(m)=f(n)$，则 $2m+n$ 的取值范围是 __$(3，+\infty)$__．

【答案】（1）$a>b$；

（2）$(3，+\infty)$．

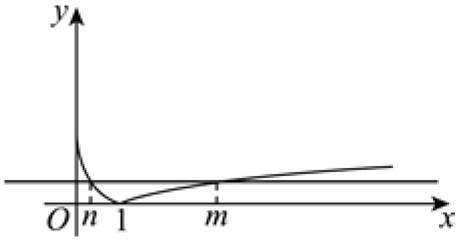
【分析】（1）利用对数函数的单调性即可判断；

（2）画出函数图象，整理可得 $mn=1$，构造函数 $g(x)=2m+\frac{1}{m}$（$m>1$），再利用对勾函数的单调性求出 $g(x)$ 的值域即可．

【解答】解：（1）$a=f(\frac{1}{4})=|\lg\frac{1}{4}|=|-\lg 4|=\lg 4$，$b=f(2)=|lg2|=lg2$，

$\therefore a>b$；

（2）画出 $f(x)$ 的图象，如图所示：



由图可知，当 f（m）$=f$（n）时，$0<n<1<m$，

∴f（n）$=-lgn$，f（m）$=lgm$，

∴$lgm+lgn=0$，

∴$lgmn=0$，$mn=1$，即 $n=\frac{1}{m}$，

∴$2m+n=2m+\frac{1}{m}$

令 g（m）$=2m+\frac{1}{m}=2$（$m+\frac{\frac{1}{2}}{m}$），$m>1$，

由对勾函数的性质可知，g（m）在（1，$+\infty$）上单调递增，

∴g（m）$>g$（1）$=3$，即 $2m+n>3$．

故答案为：$a>b$；（3，$+\infty$）．

16．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant m\\ -\frac{2}{3}x, & x>m\end{cases}$ 的值域为 **R**，侧实数 m 的取值范围是 ＿$[0,\frac{3}{2}]$＿．

【答案】$[0,\frac{3}{2}]$．

【分析】令 $y_2=-\frac{2}{3}x$、$y_1=x^2-2x$，求出函数 $y_1=x^2-2x$ 的最小值及函数的单调性，再求出两函数的交点坐标，最后对 m 分类讨论，分别计算可得．

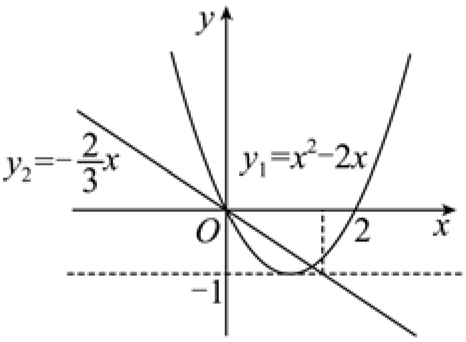
【解答】解：对于函数 $y_1=x^2-2x$，则 $y_1=(x-1)^2-1\geqslant-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

且函数在（$-\infty$，1）上单调递减，在（1，$+\infty$）上单调递增，

对于函数 $y_2=-\frac{2}{3}x$，令 $y_2=-1$，则 $x=\frac{3}{2}$，且函数在定义域上单调递减，

令 $x^2-2x=-\frac{2}{3}x$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{3}$，所以 $y_2=-\frac{2}{3}x$ 与 $y_1=x^2-2x$ 的两个交点分别为$(0,0)$、$(\frac{4}{3},-\frac{8}{9})$，

则函数 $y_2=-\frac{2}{3}x$ 与 $y_1=x^2-2x$ 的图象如下所示：



当$m>\frac{3}{2}$时，当 $x>m$ 时 $f(x)\in(-\infty,\ -\frac{2}{3}m)$，当 $x\leqslant m$ 时 $f(x)\in[-1,+\infty)$，

显然 $-\frac{2}{3}m<-1$，此时函数 $f(x)$ 的值域不为 R，不符合题意；

当 $m<0$ 时，当 $x>m$ 时 $f(x)\in(-\infty,\ -\frac{2}{3}m)$，当 $x\leqslant m$ 时 $f(x)\in[m^2-2m,+\infty)$，

此时 $m^2-2m-(-\frac{2}{3}m)=m^2-\frac{4}{3}m=m(m-\frac{4}{3})>0$，即 $m^2-2m>-\frac{2}{3}m$，此时函数 $f(x)$ 的值域不为 R，

不符合题意；

当$0\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$时，在 $x\in(0,m)$ 时 $y_2>y_1$，即 $m^2-2m<-\frac{2}{3}m$，

此时 $f(x)$ 的值域为 **R**，符合题意，

当$\frac{4}{3}<m\leqslant\frac{3}{2}$时，当 $x>m$ 时 $f(x)\in(-\infty,\ -\frac{2}{3}m)$，当 $x\leqslant m$ 时 $f(x)\in[-1,+\infty)$，

此时 $-1-(-\frac{2}{3}m)=\frac{2}{3}m-1\leqslant 0$，即$-1\leqslant-\frac{2}{3}m$，此时函数 $f(x)$ 的值域为 **R**，符合题意；

综上可得$0\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$，即实数 m 的取值范围是$[0,\ \frac{3}{2}]$.

故答案为：$[0,\ \frac{3}{2}]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）（1）已知 $10^m=2$，$10^n=3$，求 $10^{\frac{3m-2n}{2}}$ 的值；

（2）已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，求 a^2+a^{-2} 的值；

（3）计算：$(\frac{1}{2})^{\log_2 3}\times 4^{\frac{1}{2}}+\log_2 3\times\log_3 4-3^0$.

【答案】（1）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$；（2）47；（3）$\frac{5}{3}$.

【分析】（1）根据指数幂的运算法则计算可得；

（2）将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$两边平方求出 $a+a^{-1}$，再平方即可求出 a^2+a^{-2} 的值；

（3）根据对数的运算法、换底公式及对数的运算性质计算可得．

【解答】解：（1）因为 $10^m=2$，$10^n=3$，

所以 $10^{\frac{3m-2n}{2}}=\frac{10^{\frac{3}{2}m}}{10^n}=\frac{(10^m)^{\frac{3}{2}}}{10^n}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

（2）因为 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，所以 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=9$，

所以 $a+a^{-1}=7$，

所以 $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=47$；

（3）$(\frac{1}{2})^{\log_2 3}\times 4^{\frac{1}{2}}+\log_2 3\times \log_3 4-3^0=2^{-\log_2 3}\times 2+\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg 3}-1=2^{\log_2\frac{1}{3}}\times 2+\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{2\lg 2}{\lg 4}-1=\frac{1}{3}\times 2+2-1=\frac{5}{3}$．

18．（12 分）已知函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 取得最大值时自变量 x 的集合；

（2）记集合 $M=\{y|y=f(x),\ x\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]\}$，集合 $N=\{x|\tan\frac{\pi x}{3}-\sqrt{3}\geqslant 0,\ x\in[0,\ \frac{3}{2})\}$，求 $M\cap N$．

【答案】（1）$T=\pi$，$\{x|x=k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\in Z\}$；

（2）$\{1\}$．

【分析】（1）根据周期公式计算即可，由 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解出自变量 x 的集合即可；

（2）根据 $x\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$，求出函数 $f(x)$ 的值域，即得集合 M，由正切函数的性质，解出集合 N，由交集的定义求解即可．

【解答】解：（1）因为 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in Z$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 2，

所以此时自变量 x 的集合为 $\{x|x=k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\in Z\}$；

（2）因为 $x\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}]$，

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in[-1,\frac{1}{2}]$，

所以 $M=[-2,1]$.

因为 $x\in[0,\frac{3}{2})$，所以 $\frac{\pi x}{3}\in[0,\frac{\pi}{2})$，

由 $\tan\frac{\pi x}{3}-\sqrt{3}\geqslant0$，可得 $\tan\frac{\pi x}{3}\geqslant\sqrt{3}$，

所以 $\frac{\pi x}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，

所以 $x\in[1,\frac{3}{2})$，$N=[1,\frac{3}{2})$，

所以 $M\cap \mathbf{N}=\{1\}$.

19．（12 分）已知 $f(x)=a+\frac{2}{2^x+1}$（$a\in\mathbf{R}$）为奇函数．

（1）求 a 的值及 $y=\frac{f(2x)+1}{f(x)+1}$ 的最大值；

（2）若关于 x 的不等式 $f(mx^2)+f(-mx-2)>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

【答案】（1）$a=-1$，$y=\frac{f(2x)+1}{f(x)+1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$；

（2）实数 m 的取值范围为 $(-8,0]$.

【分析】（1）由题意得函数定义域为 $\mathbf{R}$，利用奇函数的性质可得 $2a+2=0$，求出 a，则 $f(x)=-1+\frac{2}{2^x+1}$，表示出 $=\frac{f(2x)+1}{f(x)+1}=\frac{2^x+1}{4^x+1}$，利用基本不等式，即可得出答案；

（2）题意转化为 $f(mx^2)>f(mx+2)$，即 $-1+\frac{2}{2^{mx^2}+1}>-1+\frac{2}{2^{mx+2}+1}$，则 $2^{mx^2}<2^{mx+2}$，转化为关于 x 的不等式 $mx^2<mx+2$ 恒成立，分类讨论 $m=0$，$m\neq0$，即可得出答案．

【解答】解：（1）由题意得函数定义域为 $\mathbf{R}$，

$\because f(x)=a+\frac{2}{2^x+1}$（$a\in\mathbf{R}$）为奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，即 $a+\frac{2}{2^{-x}+1}=a+\frac{2^{x+1}}{1+2^x}=-(a+\frac{2}{2^x+1})$，整理得 $2a+\frac{2^{x+1}}{1+2^x}+\frac{2}{2^x+1}=0$，即 $2a+2=0$，

$\therefore a=-1$，则 $f(x)=-1+\frac{2}{2^x+1}$，

$\therefore y=\dfrac{f(2x)+1}{f(x)+1}=\dfrac{2^x+1}{4^x+1}=\dfrac{2^x+1}{(2^x+1)^2-2(2^x+1)+2}=\dfrac{1}{2^x+1+\dfrac{2}{2^x+1}-2}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{(2^x+1)\cdot\dfrac{2}{2^x+1}}-2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，当且仅当$\dfrac{2}{2^x+1}=2^x+1$，即 $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$ 时等号成立，

故 $y=\dfrac{f(2x)+1}{f(x)+1}$的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$；

（2）∵$f(x)=-1+\dfrac{2}{2^x+1}$（$a\in\mathbf{R}$）为奇函数，

∴关于 x 的不等式 $f(mx^2)+f(-mx-2)>0$ 恒成立，转化为 $f(mx^2)>f(mx+2)$，

$\therefore -1+\dfrac{2}{2^{mx^2}+1}>-1+\dfrac{2}{2^{mx+2}+1}$，$\therefore 2^{mx^2}<2^{mx+2}$，

∴关于 x 的不等式 $mx^2<mx+2$ 恒成立，即 $mx^2-mx-2<0$，

当 $m=0$ 时，$-2<0$ 恒成立，符合题意；

当 $m\neq0$ 时，则$\begin{cases}m<0\\(-m)^2+8m<0\end{cases}$，解得 $-8<m<0$，

综上所述，实数 m 的取值范围为（-8，0].

20.（12 分）把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是 θ_1℃，空气的温度是 θ_0℃，那么 $t$min 后物体的温度（单位：℃）可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$（$e$ 是自然对数的底数）求得，其中 k 是一个随着物体与空气接触状况而定的正常数．现有 65℃的物体，放在 15℃的空气中冷却，1min 以后物体的温度是 55℃．

（1）求 k 的值；

（2）若要将物体冷却到 35℃，求需要冷却的时间：再经多长时间，可以冷却至 25℃（精确到 1）？

（参考数据：$\ln2\approx0.69$，$\ln3\approx1.10$，$\ln5\approx1.61$）

【答案】（1）$\ln\dfrac{5}{4}$；

（2）要将物体冷却到 35℃，需要冷却 4min：再经 3min 时间，可以冷却至 25℃．

【分析】（1）把 $\theta_1=65$，$\theta_0=15$，$t=1$，$\theta=55$ 代入公式即可；

（2）把数据代入公式，结合（1）中的 $e^{-k}=\dfrac{4}{5}$，即可求得结果．

【解答】解：（1）由题意可知，$\theta_1=65$，$\theta_0=15$，当 $t=1$ 时，$\theta=55$，

于是 $55=15+(65-15)e^{-k}$，

所以$-k=\ln\frac{40}{50}=2\ln2-\ln5$，$k=\ln\frac{5}{4}$.

（2）当 θ＝35 时，35＝15+（65－15）e^{-kt}，

所以$e^{-kt}=\frac{2}{5}$，由（1）可知$e^{-k}=\frac{4}{5}$，所以$(\frac{4}{5})^{t}=\frac{2}{5}$，

所以$t=\log_{\frac{4}{5}}\frac{2}{5}=\frac{\ln2-\ln5}{\ln4-\ln5}\approx\frac{0.69-1.61}{2\times0.69-1.61}\approx4$，

当 θ＝25 时，25＝15+（65－15）$e^{-0.2t}$，

所以$e^{-kt}=\frac{1}{5}$，所以$(\frac{4}{5})^{t}=\frac{1}{5}$，所以$t=\log_{\frac{4}{5}}\frac{1}{5}=\frac{-\ln5}{\ln4-\ln5}\approx\frac{-1.61}{2\times0.69-1.61}\approx7$$\triangle t$＝7－4＝3，

故要将物体冷却到 35℃，需要冷却 4*min*：再经 3*min* 时间，可以冷却至 25℃．

21．（12 分）已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$．

（1）判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明；

（2）若$g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$，记 $h(x)=f(x)-g(x)$，求证：$h(x)$ 有且只有一个零点．

【答案】（1）$f(x)$ 单调递增，证明见解析；

（2）证明见解析．

【分析】（1）求出函数定义域，判断单调性，根据函数单调性的定义即可证明结论；

（2）先判断$g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$的单调性，当 $x\in(-1,0]$时，推出 $h(x)=f(x)-g(x)<0$，可判断无零点；当 $x\in(0,1)$ 时，判断 $h(x)$ 的单调性，结合零点存在定理可判断零点情况，综合即可证明结论．

【解答】解：（1）由$\begin{cases}x+1>0\\1-x>0\end{cases}$，所以$-1<x<1$，所以 $f(x)$ 的定义域$(-1,1)$，

判断：$f(x)$ 在$(-1,1)$上单调递增．

证明如下：任取 x_1，$x_2\in(-1,1)$且 $x_1<x_2$，

所以$f(x_1)-f(x_2)=\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}-\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}=\ln\frac{(x_1+1)(1-x_2)}{(1-x_1)(x_2+1)}$，

又 $x_1+1>0$，$1-x_2>0$，$1-x_1>0$，$x_2+1>0$，$(x_1+1)(1-x_2)-(1-x_1)(x_2+1)=2(x_1-x_2)<0$，

所以$0<\frac{(x_1+1)(1-x_2)}{(1-x_1)(x_2+1)}<1$，所以$\ln\frac{(x_1+1)(1-x_2)}{(1-x_1)(x_2+1)}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在$(-1,1)$上单调递增．

（2）证明：因为$g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$在（﹣1，0）上单调递增；在（0，1）上单调递减；

当 $x\in$（﹣1，0]时，$g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x>0$；

$\frac{x+1}{1-x}=\frac{2}{1-x}-1\in(0,1]$，$f(x)=\ln\frac{x+1}{1-x}=\ln(\frac{2}{1-x}-1)\leqslant 0$，

此时，$h(x)=f(x)-g(x)<0$，所以 $h(x)$ 在（﹣1，0]上没有零点；

当 $x\in$（0，1）时，$\frac{2}{1-x}-1$递增，故$f(x)=\ln\frac{x+1}{1-x}=\ln(\frac{2}{1-x}-1)$递增，

则 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在（0，1）上单调递增，

又$h(0)=f(0)-g(0)=-2<0$，$h(\frac{2}{3})=f(\frac{2}{3})-g(\frac{2}{3})=\ln 5-1>0$，

所以 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在（0，1）上有唯一的零点，

综上，$h(x)$ 在（﹣1，1）上有且只有一个零点．

22．（12 分）已知函数 $f(\theta)=|\sin\theta-a|-\cos^2\theta$（$a\in\mathbf{R}$）．

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(\theta)$ 的最值；

（2）求函数 $f(\theta)$ 的最小值 $h(a)$．

【答案】（1）$f(\theta)$ 最小值为$\frac{3}{4}$；的最大值为 3；

（2）$h(a)=\begin{cases}-a-\frac{5}{4}, & a<-\frac{1}{2}\\ a^2-1, & -\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\\ a-\frac{5}{4}, & a>\frac{1}{2}\end{cases}$．

【分析】（1）首先得到 $f(\theta)=2-\sin\theta-\cos^2\theta$，再根据平方关系及二次函数的性质计算可得；

（2）根据平方关系得到 $f(\theta)=\sin^2\theta+|\sin\theta-a|-1$，令 $t=\sin\theta$，转化为关于 t 的二次函数其中 $t\in[-1,1]$，对参数 a 分类讨论，分别求出函数的最小值．

【解答】解：（1）因为 $-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，所以当 $a=2$ 时，$f(\theta)=2-\sin\theta-\cos^2\theta$，

又因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以$f(\theta)=1-\sin\theta+\sin^2\theta=(\sin\theta-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，

当$\sin\theta=\frac{1}{2}$时，$f(\theta)$ 的最小值为$\frac{3}{4}$；

当 $\sin\theta=-1$ 时，$f(\theta)$ 的最大值为 3．

（2）因为 $f(\theta)=|\sin\theta-a|-\cos^2\theta=\sin^2\theta+|\sin\theta-a|-1$，

令 $t=\sin\theta$，$t\in[-1,1]$，

所以 $g(t)=t^2+|t-a|-1$，$t\in[-1,1]$，

①当 $a\geqslant 1$ 时，$g(t)=t^2+|t-a|-1=t^2-t+a-1$，

此时 $g(t)$ 在 $(-1,\ \frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},\ 1)$ 上单调递增，

所以 $h(a)=g(t)_{min}=g(\frac{1}{2})=a-\frac{5}{4}$；

②当 $a\leqslant -1$ 时，$g(t)=t^2+|t-a|-1=t^2+t-a-1$，

此时 $g(t)$ 在 $(-1,\ -\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\frac{1}{2},\ 1)$ 上单调递增，

所以 $h(a)=g(t)_{min}=g(-\frac{1}{2})=-a-\frac{5}{4}$；

③当 $-1<a<1$ 时，$g(t)=t^2+|t-a|-1=\begin{cases}t^2-t+a-1,\ -1\leqslant t<a.\\ t^2+t-a-1,\ a<t\leqslant 1,\end{cases}$

（i）当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，此时 $g(t)$ 在 $(-1,\ \frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},\ a)$ 上单调递增，在（a，1）上单调递增，

所以 $h(a)=g(t)_{min}=g(\frac{1}{2})=a-\frac{5}{4}$；

（ii）当 $-1<a<-\frac{1}{2}$ 时，此时 $g(t)$ 在（-1，a）上单调递减，在 $(a,\ -\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\frac{1}{2},\ 1)$ 上单调递增，

所以 $h(a)=g(t)_{min}=g(-\frac{1}{2})=-a-\frac{5}{4}$；

（iii）当 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，此时 $g(t)$ 在（-1，a）上单调递减，在（a，1）上单调递增，

所以 $h(a)=g(t)_{min}=g(a)=a^2-1$．

综上可得 $h(a)=\begin{cases}-a-\frac{5}{4},\ a<-\frac{1}{2}\\ a^2-1,\ -\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}.\\ a-\frac{5}{4},\ a>\frac{1}{2}\end{cases}$