

2019 年江苏省宿迁中学高考数学一调试卷（理科）

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上．）

- （5 分）已知集合 $A = (-2, 1]$, $B = [-1, 2)$, 则 $A \cup B =$ _____.
- （5 分）已知幂函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则 $f(x) =$ _____.
- （5 分）命题“若 $x^2 < 1$, 则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是_____.
- （5 分）若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ _____.
- （5 分）函数 $y = x - 2\sin x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调增区间为_____.
- （5 分）设方程 $2^x + x = 4$ 的根为 x_0 , 若 $x_0 \in (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, 则整数 $k =$ _____.
- （5 分）已知函数 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-2x)}$, 则 $f(x)$ 的定义域为_____.
- （5 分）若存在实数 x , 使不等式 $ae^{2x} + 2e^x - 1 \geq 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____.
- （5 分）若函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \ln x$, 则不等式 $f(x) < -e$ 的解集为_____.
- （5 分）已知定义在集合 A 上的函数 $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(2x+1)$, 其值域为 $(-\infty, 1]$, 则 $A =$ _____.
- （5 分）已知函数 $f(x) = x^2 - 2|x| + 4$ 定义域为 $[a, b]$, 其中 $a < b$, 值域 $[3a, 3b]$, 则满足条件的数组 (a, b) 为_____.
- （5 分）已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-1}$, 平行四边形 $ABCD$ 四个顶点都在函数 $f(x)$ 图象上, 且 $A(2, 1)$, $B(\frac{5}{4}, 2)$, 则平行四边形 $ABCD$ 的面积为_____.
- （5 分）已知函数 $f(x) = ax - x^2 - \ln x$, 若函数 $f(x)$ 存在极值, 且所有极值之和小于 $5 + \ln 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- （5 分）已知函数 $f(x) = |x - a| - \frac{3}{x} + a - 2$ 有且仅有三个零点, 且它们成等差数列, 则实数 a 的取值集合为_____.

二、解答题（本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题纸指定区域内作答，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

- （14 分）已知集合 $A = \{x | (x-6)(x-2a-5) > 0\}$, 集合 $B = \{x | [(a^2+2) - x] \cdot (2a-x) < 0\}$.

（1）若 $a=5$, 求集合 $A \cap B$;

(2) 已知 $a > \frac{1}{2}$ ，且“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

16. (14 分) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + m}$ 是奇函数.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 解不等式 $f(x) + f(1+x) > 0$.

17. (14 分) 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 在 $x=2$ 时取极小值 4.

(1) 求实数 a, b 的值;

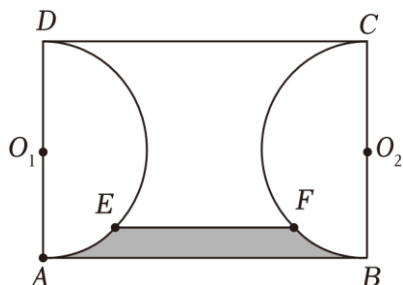
(2) 点 P 为曲线 $y=f(x)$ 上任意点，曲线在 P 处的切线为直线 l ， l 与 y 轴交于点 A ， l 与直线 $y=x$ 交于点 B ，求线段 AB 长度的最小值.

18. (16 分) 宿迁旅游宣传片每天 6:30 亮相 CCTV-1《朝闻天下》：楚汉风韵浓厚的项王故里，独具风情的三台山国家生态公园，烟波浩淼的骆马湖，自然生态绝佳的洪泽湖湿地……水韵江苏有个因水而美，水滋水味的城，有个让人“心宿宿情迁迁”的地方——宿迁！

如图，三台山镜湖准备打造水上乐园，在一块矩形场地 $ABCD$ ， $AB=120$ 米， $AD=80$ 米，以 AD ， BC 为直径的半圆 O_1 和半圆 O_2 （半圆在矩形 $ABCD$ 内部）为两个半圆形水上主题乐园， BC ， CD ， DA 都建有围墙，游客只能从线段 AB 处进出该主题乐园. 为了进一步提高经济效益，水上乐园管理部门决定沿着 $\widehat{AE}$ 、 $\widehat{FB}$ 修建不锈钢护栏，沿着线段 EF 修建该主题乐园大门并设置检票口，其中 E, F 分别为 $\widehat{AD}$ ， $\widehat{BC}$ 上的动点， $EF \parallel AB$ ，且线段 EF 与线段 AB 在圆心 O_1 和 O_2 连线的同侧. 已知弧线部分的修建费用为 200 元/米，直线部分的平均修建费用为 400 元/米.

(1) 若 $EF=80$ 米，则检票等候区域（图中阴影部分）面积为多少平方米？

(2) 试确定点 E 的位置，使得修建费用最低.



19. (16 分) 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - x$.

(1) 解不等式 $f(x) < \log_2 5 - 1$;

(2) 设函数 $g(x) = \log_2(a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a)$ ，其中 $a > 0$ ，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个交

点，求 a 的取值范围.

20. (16 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2ax^2 + bx + 1}{e^x}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(1) = 1$, 且方程 $f(x) = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有解, 求实数 a 的取值范围.

2019 年江苏省宿迁中学高考数学一调试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上．）

1.（5 分）已知集合 $A = (-2, 1]$, $B = [-1, 2)$, 则 $A \cup B = \underline{(-2, 2)}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】已知集合 $A = (-2, 1]$, $B = [-1, 2)$, 根据并集的定义进行求解.

【解答】解： $\because$ 集合 $A = (-2, 1]$, $B = [-1, 2)$,

$$A \cup B = (-2, 2),$$

故答案为： $(-2, 2)$.

2.（5 分）已知幂函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则 $f(x) = \underline{-\frac{1}{x^2}}$.

【答案】 $\frac{1}{x^2}$.

【分析】由题意，利用幂函数的定义和性质，求得 $f(x)$ 的解析式.

【解答】解： $\because$ 幂函数 $y = f(x) = x^\alpha$ 的图像过点 $(2, \frac{1}{4})$,

$$\therefore 2^\alpha = \frac{1}{4}, \therefore \alpha = -2,$$

$$\text{则 } f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2},$$

故答案为： $\frac{1}{x^2}$.

3.（5 分）命题“若 $x^2 < 1$, 则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是“若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 则 $x^2 \geq 1$ ”.

【答案】见试题解答内容

【分析】先否定原命题的题设做结论，再否定原命题的结论做题设，就得到原命题的逆否命题.

【解答】解： $\because$ “ $x^2 < 1$ ”的否定为“ $x^2 \geq 1$ ”. “ $-1 < x < 1$ ”的否定是“ $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$ ”.

$\therefore$ 命题“若 $x^2 < 1$, 则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是：“若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 则 $x^2 \geq 1$ ”.

故答案为：若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 则 $x^2 \geq 1$.

4.（5 分）若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \underline{1}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】首先分析题目已知 $2^a=5^b=10$ ，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值，故考虑到把 a 和 b 用对数的形式表达出来代入 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ，再根据对数的性质以及同底对数和的求法解得，即可得到答案。

【解答】解：因为 $2^a=5^b=10$ ，

故 $a=\log_2 10$ ， $b=\log_5 10$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{10} 2+\log_{10} 5=\log_{10} 10=1$$

故答案为 1.

5. (5 分) 函数 $y=x-2\sin x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调增区间为 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

【答案】见试题解答内容

【分析】要求函数 $y=x-2\sin x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调增区间，求导，令导数大于零，解此不等式即可求得结果，注意函数的定义域.

【解答】解：令 $y'=1-2\cos x>0$ ，

$\therefore x \in (0, 2\pi)$

解得 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

故答案为 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

6. (5 分) 设方程 $2^{x+x}=4$ 的根为 x_0 ，若 $x_0 \in (k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ ，则整数 $k=1$.

【答案】见试题解答内容

【分析】令 $f(x)=2^{x+x}-4$ ，由 $f(x)$ 的单调性知： $f(k-\frac{1}{2})<0$ ，且 $f(k+\frac{1}{2})>0$ ，根据 k 取整数，从而确定 k 值.

【解答】解：令 $f(x)=2^{x+x}-4$ ，则 $f(x_0)=0$ ，且 $f(x)=2^{x+x}-4$ 在定义域内是个增函数，

$\therefore f(k-\frac{1}{2})<0$ ，且 $f(k+\frac{1}{2})>0$

即： $2^{k-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}}-4<0$ ，且 $2^{k+\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2}}-4>0$

又 k 取整数，

$\therefore k=1$ ；

故答案为 1.

7. (5 分) 已知函数 $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-2x)}$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 $[0, \frac{1}{2})$.

【答案】见试题解答内容

【分析】根据偶次根号下的被开方数大于等于零，对数的真数大于零，列出不等式组，进行求解再用集合或区间的形式表示出来.

【解答】解：要使函数有意义，则
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-2x) \geq 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases},$$

解得， $0 \leq x < \frac{1}{2}$,

则函数的定义域是 $[0, \frac{1}{2})$.

故答案为： $[0, \frac{1}{2})$.

8. (5分) 若存在实数 x ，使不等式 $ae^{2x} + 2e^x - 1 \geq 0$ 成立，则实数 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

【答案】见试题解答内容

【分析】不等式 $ae^{2x} + 2e^x - 1 \geq 0$ 有解，等价于不等式 $a \geq \frac{1-2e^x}{e^{2x}}$ 有解；把右边看成关于 x 的函数，然后求其最小值，要使原不等式有解，只需 a 大于等于右边的最小值即可.

【解答】解：因为 $ae^{2x} + 2e^x - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a \geq \frac{1-2e^x}{e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow a \geq e^{-2x} - 2e^{-x}$$

$$\text{令 } t = e^{-x} > 0$$

$$\text{所以 } a \geq t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1$$

$$\text{因为 } t > 0, \text{ 所以 } (t-1)^2 - 1 \geq -1,$$

$$\text{所以 } a \geq -1.$$

故答案为 $[-1, +\infty)$.

9. (5分) 若函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x \ln x$ ，则不等式 $f(x) < -e$ 的解集为 $(-\infty, -e)$.

【答案】见试题解答内容

【分析】由奇函数的性质 $f(-x) = -f(x)$ ，求出函数 $f(x)$ 的解析式，对 $x > 0$ 时的解析式求出 $f'(x)$ ，并判断出函数的单调性和极值，再由奇函数的图象特征画出函数 $f(x)$ 的图象，根据图象和特殊的函数值求出不等式的解集.

【解答】解： $\because$ 函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数

∴当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, 不满足不等式 $f(x) < -e$,

设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

∴当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \ln x$, ∴ $f(-x) = -x \ln(-x)$,

∴函数 $f(x)$ 是奇函数, ∴ $f(x) = -f(-x) = x \ln(-x)$,

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ x \ln(-x), & x < 0 \end{cases},$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$,

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{1}{e}$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$,

∴函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上递减,

在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上递增,

当 $x = \frac{1}{e}$ 时取到极小值,

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} > -e,$$

再由函数 $f(x)$ 是奇函数, 画出函数 $f(x)$ 的图象如图:

∴当 $x > 0$ 时, 当 $x = \frac{1}{e}$ 时取到极小值,

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} > -e,$$

∴不等式 $f(x) < -e$ 在 $(0, +\infty)$ 上无解,

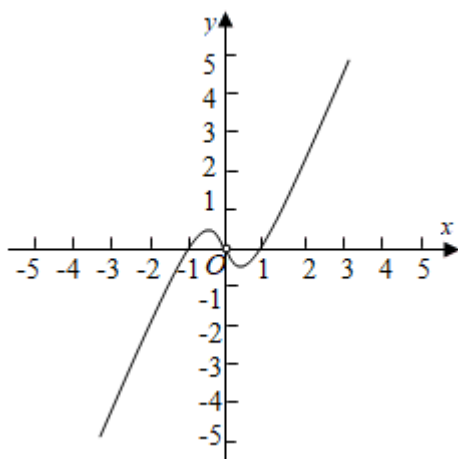
在 $(-\infty, 0)$ 上有解,

$$\therefore f(-e) = (-e) \ln[-(-e)] = -e,$$

∴不等式 $f(x) < -e$ 解集是:

$$(-\infty, -e),$$

故答案为: $(-\infty, -e)$.



10. (5 分) 已知定义在集合 A 上的函数 $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(2x+1)$, 其值域为 $(-\infty, 1]$, 则 A $= (1, \frac{3}{2}]$.

【答案】见试题解答内容

【分析】由题意和真数大于零列出不等组, 求出函数 $f(x)$ 的定义域, 利用对数的运算化简解析式, 由设 $t = 2x^2 - x - 1$, 由函数的值域和对数函数的性质求出集合 A .

【解答】解: 由题意得, $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$, 解得 $x > 1$,

则函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \text{又 } f(x) &= \log_2(x-1) + \log_2(2x+1) = \log_2(x-1)(2x+1) \\ &= \log_2(2x^2 - x - 1), \end{aligned}$$

设 $t = 2x^2 - x - 1$, $\because$ 值域为 $(-\infty, 1]$, $\therefore t \leq 2$, 则 $2x^2 - x - 1 \leq 2$,

即 $2x^2 - x - 3 \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 集合 $A = (1, \frac{3}{2}]$,

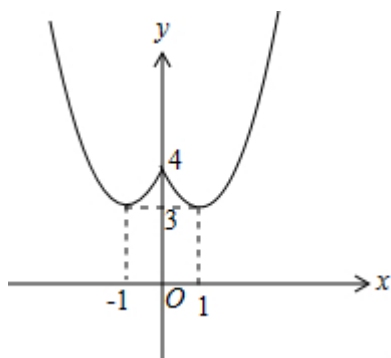
故答案为: $(1, \frac{3}{2}]$.

11. (5 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2|x| + 4$ 定义域为 $[a, b]$, 其中 $a < b$, 值域 $[3a, 3b]$, 则满足条件的数组 (a, b) 为 $(1, 4)$.

【答案】见试题解答内容

【分析】由题意画出图形, 结合函数值域可得 a 的范围, 由此可得函数在 $[a, b]$ 上为增函数, 再由定义域与值域的关系列式求得满足条件的数组 (a, b) .

【解答】解: 作出函数 $f(x) = x^2 - 2|x| + 4$ 的图象如图:



∵函数值域为 $[3a, 3b]$ ，可得 $3a \geq 3$ ，即 $a \geq 1$ 。

则函数在 $[a, b]$ 上为增函数，

$$\therefore \begin{cases} a \geq 1 \\ a^2 - 2a + 4 = 3a \\ b^2 - 2b + 4 = 3b \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} (a < b).$$

∴满足条件的数组 (a, b) 为 $(1, 4)$ 。

故答案为： $(1, 4)$ 。

12. (5分) 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-1}$ ，平行四边形 $ABCD$ 四个顶点都在函数 $f(x)$ 图象上，且 $A(2, 1)$ ， $B(\frac{5}{4}, 2)$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{11}{2}$ 。

【答案】见试题解答内容

【分析】由条件可设 $C(x_1, \log_3 \frac{x_1+1}{x_1-1})$ ， $D(x_2, \log_3 \frac{x_2+1}{x_2-1})$ ，从而可以得出向量 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{DC}$ 的坐标，

根据题意有 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，求出 x_1, x_2 ，从而得出 C 点的坐标，求出平行四边形的高，可得答案。

【解答】解：根据题意设 $C(x_1, \log_3 \frac{x_1+1}{x_1-1})$ ， $D(x_2, \log_3 \frac{x_2+1}{x_2-1})$ ，

$$\text{则：} \overrightarrow{AB} = (-\frac{3}{4}, 1), \overrightarrow{DC} = (x_1 - x_2, \log_3 \frac{(x_1+1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2+1)});$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC};$$

$$\therefore x_1 - x_2 = -\frac{3}{4}, \text{ 且 } \log_3 \frac{(x_1+1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2+1)} = 1;$$

$$\text{整理得, } x_1 x_2 = \frac{5}{2},$$

$$\text{解得 } x_2 = -\frac{5}{4}, \text{ 或 } x_2 = 2;$$

$$\therefore x_1 = -2; \text{ 或 } x_1 = \frac{5}{4} \text{ (舍)},$$

$$\therefore C(-2, -1), D(-\frac{5}{4}, -2);$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \frac{5}{4}$$

$$\text{直线 } AB \text{ 的方程为: } 4x+3y-11=0,$$

$$\text{故 } C \text{ 到 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{22}{5},$$

$$\text{故四边形 } ABCD \text{ 的面积为: } S = \frac{11}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{11}{2}$$

13. (5分) 已知函数 $f(x) = ax - x^2 - \ln x$, 若函数 $f(x)$ 存在极值, 且所有极值之和小于 $5 + \ln 2$, 则实数 a 的取值范围是 $(2\sqrt{2}, 4)$.

【答案】见试题解答内容

【分析】由 $f(x)$ 存在极值, 得到其导数值在 $(0, +\infty)$ 上有根, 设出方程的根, 由根与系数的关系, 得到不等式解出即可.

$$\text{【解答】解: } f(x) = -\frac{2x^2 - ax + 1}{x},$$

$\therefore f(x)$ 存在极值,

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上有根,}$$

即方程 $2x^2 - ax + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有根.

设方程 $2x^2 - ax + 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{由韦达定理得: } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{a}{2} \end{cases},$$

所以方程的根必为两不等正根.

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= a(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2) - (\ln x_1 + \ln x_2) \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + 1 - \ln \frac{1}{2} < 5 - \ln \frac{1}{2}, \therefore a^2 < 16, \quad -4 < a < 4, \end{aligned}$$

$$\text{由 } \Delta = a^2 - 8 > 0, \text{ 解得: } a > 2\sqrt{2},$$

故所求 a 的取值范围为 $(2\sqrt{2}, 4)$,

故答案为: $(2\sqrt{2}, 4)$

14. (5分) 已知函数 $f(x) = |x - a| - \frac{3}{x} + a - 2$ 有且仅有三个零点, 且它们成等差数列, 则实数 a 的取值集

合为 $\{a|a=\frac{5+3\sqrt{33}}{8}\text{或}-\frac{9}{5}\}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】令 $g(x)=0$, 化简函数 $g(x)=\begin{cases} 2a-x-\frac{3}{x}, & x\leq a \\ x-\frac{3}{x}, & x>a \end{cases}$, 从而不妨设 $f(x)=0$ 的 3 个根为 x_1 ,

x_2, x_3 , 且 $x_1<x_2<x_3$, 讨论当 $x>a$ 时, 求得两根, $x\leq a$ 时, ① $a\leq -1$, ② $-1<a\leq 3$, ③ $a>3$, 运用等差数列的中项的性质, 进而确定 a 的值.

【解答】解: 设 $f(x)=0$, 可得 $|x-a|-\frac{3}{x}+a=2$,

设 $g(x)=|x-a|-\frac{3}{x}+a$, $h(x)=2$,

函数 $g(x)=\begin{cases} 2a-x-\frac{3}{x}, & x\leq a \\ x-\frac{3}{x}, & x>a \end{cases}$,

不妨设 $f(x)=0$ 的 3 个根为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1<x_2<x_3$,

当 $x>a$ 时, $f(x)=0$, 解得 $x=-1, x=3$;

① $a\leq -1$, $\because x_2=-1, x_3=3$, 由等差数列的性质可得 $x_1=-5$,

由 $f(-5)=0$, 解得 $a=-\frac{9}{5}$, 满足 $f(x)=0$ 在 $(-\infty, a]$ 上有一解.

② $-1<a\leq 3$, $f(x)=0$ 在 $(-\infty, a]$ 上有两个不同的解, 不妨设 x_1, x_2 , 其中 $x_3=3$,

所以有 x_1, x_2 是 $2a-x-\frac{3}{x}=2$ 的两个解,

即 x_1, x_2 是 $x^2-(2a-2)x+3=0$ 的两个解.

得到 $x_1+x_2=2a-2, x_1x_2=3$,

又由设 $f(x)=0$ 的 3 个根为 x_1, x_2, x_3 成差数列, 且 $x_1<x_2<x_3$, 得到 $2x_2=x_1+3$,

解得: $a=\frac{5+3\sqrt{33}}{8}$ 或 $\frac{5-3\sqrt{33}}{8}$ (舍去);

③ $a>3$, $f(x)=0$ 最多只有两个解, 不满足题意;

综上所述, $a=\frac{5+3\sqrt{33}}{8}$ 或 $-\frac{9}{5}$.

故答案为: $\{a|a=\frac{5+3\sqrt{33}}{8}\text{或}-\frac{9}{5}\}$.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题纸指定区域内作答, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

15. (14 分) 已知集合 $A=\{x|(x-6)(x-2a-5)>0\}$, 集合 $B=\{x|[(a^2+2)-x]\cdot(2a-x)<0\}$.

(1) 若 $a=5$ ，求集合 $A \cap B$ ；

(2) 已知 $a > \frac{1}{2}$ ，且“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) $a=2$ 时，集合 A 、 B 为两确定的集合，利用集合运算求解；

(2) $a > \frac{1}{2}$ 时，根据元素 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件，说明 $B \subseteq A$ ，确定端点的大小，结合数轴分析条件求解即可

【解答】 解：(1) 由集合 A 中的不等式 $(x-6)(x-15) > 0$ ，解得： $x < 6$ 或 $x > 15$ ，即 $A = (-\infty, 6) \cup (15, +\infty)$ ，

集合 B 中的不等式为 $(27-x)(10-x) < 0$ ，即 $(x-27)(x-10) < 0$ ，解得： $10 < x < 27$ ，即 $B = (10, 27)$ ，

$\therefore A \cap B = (15, 27)$ ，

(2) 当 $a > \frac{1}{2}$ 时， $2a+5 > 6$ ， $\therefore A = (-\infty, 6) \cup (2a+5, +\infty)$ ，

$a^2+2 > 2a$ ， $\therefore B = (2a, a^2+2)$ ，

$\because x \in A$ 是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件， $\therefore B \subseteq A$ ，

$\therefore a^2+2 \leq 6$ ，

$\therefore \frac{1}{2} < a \leq 2$.

16. (14 分) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x+1}{2^{x+1}+m}$ 是奇函数.

(1) 求实数 m 的值；

(2) 解不等式 $f(x) + f(1+x) > 0$.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 由题意可得， $f(-1) = -f(1)$ ，代入可求 m ；

(2) 由 (1) 可得， $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+2^x}$ ，然后结合单调性的定义可设 $x_1 < x_2$ ，则作差 $f(x_2) - f(x_1)$

可判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调性，即可解不等式.

【解答】 解：(1) 由题意可得， $f(-1) = -f(1)$ ，

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+m} = -\frac{1-2}{4+m},$$

$\therefore m=2$;

$$(2) \text{ 由 (1) 可得, } f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+2^x},$$

$$\text{设 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{1+2^{x_2}} - \frac{1}{1+2^{x_1}} = \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})} < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

$$\therefore f(x) + f(1+x) > 0,$$

$$\therefore f(x) > -f(1+x) = f(-1-x),$$

$$\therefore 1+x < -x,$$

$$\text{解可得, } x < -\frac{1}{2},$$

综上可得, 不等式的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$

17. (14 分) 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 在 $x=2$ 时取极小值 4.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 点 P 为曲线 $y=f(x)$ 上任意点, 曲线在 P 处的切线为直线 l , l 与 y 轴交于点 A , l 与直线 $y=x$ 交于点 B , 求线段 AB 长度的最小值.

【答案】 (1) $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$

(2) $4\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

【分析】 (1) 根据题意可得 $\begin{cases} f(2)=4 \\ f'(2)=0 \end{cases}$, 解此方程组即可求出结果, 并验证即可;

(2) 设点 $P(x_0, x_0 + \frac{4}{x_0})$, 求导, 求出切线的斜率, 写出切线方程, 求出点 A, B 的坐标, 利用两点间的距离公式求出 $|AB|$, 利用基本不等式求出最值即可.

【解答】 解: (1) $f(x) = a - \frac{b}{x^2}$,

由已知得 $\begin{cases} f(2)=4 \\ f'(2)=0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2a + \frac{b}{2} = 4 \\ a - \frac{b}{4} = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$,

所以 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm 2$,

$f(x), f'(x)$ 随 x 的变化如下:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

所以当 $x=2$ 时取极小值，符合题意，故 $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$.

(2) 设点 $P(x_0, x_0 + \frac{4}{x_0})$ ，则斜率 $k = 1 - \frac{4}{x_0^2}$ ，

所以直线 l 的方程为： $y - (x_0 + \frac{4}{x_0}) = (1 - \frac{4}{x_0^2})(x - x_0)$ ，

令 $x=0$ ，得 $y = \frac{8}{x_0}$ ，所以点 $A(0, \frac{8}{x_0})$ ，

联立直线 l 与直线 $y=x$ ，得 $\begin{cases} x=2x_0 \\ y=2x_0 \end{cases}$ ，

所以点 $B(2x_0, 2x_0)$ ，

所以 $|AB| = \sqrt{(2x_0)^2 + (2x_0 - \frac{8}{x_0})^2} = 2\sqrt{2x_0^2 + \frac{16}{x_0^2} - 8} \geq 2\sqrt{2\sqrt{2x_0^2 \times \frac{16}{x_0^2}} - 8} = 4\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$ ，

当且仅当 $2x_0^2 = \frac{16}{x_0^2}$ ，即 $x_0 = \pm \frac{3}{2}$ 时，等号成立，

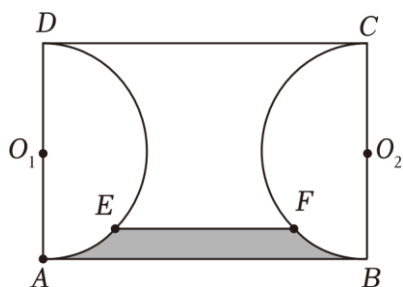
所以线段 AB 长度的最小值为 $4\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$ 。

18. (16 分) 宿迁旅游宣传片每天 6:30 亮相 CCTV-1《朝闻天下》：楚汉风韵浓厚的项王故里，独具风情的三台山国家生态公园，烟波浩淼的骆马湖，自然生态绝佳的洪泽湖湿地……水韵江苏有个因水而美，水滋水味的城，有个让人“心宿宿情迁迁”的地方——宿迁！

如图，三台山镜湖准备打造水上乐园，在一块矩形场地 $ABCD$ ， $AB=120$ 米， $AD=80$ 米，以 AD ， BC 为直径的半圆 O_1 和半圆 O_2 （半圆在矩形 $ABCD$ 内部）为两个半圆形水上主题乐园， BC ， CD ， DA 都建有围墙，游客只能从线段 AB 处进出该主题乐园。为了进一步提高经济效益，水上乐园管理部门决定沿着 $\widehat{AE}$ 、 $\widehat{FB}$ 修建不锈钢护栏，沿着线段 EF 修建该主题乐园大门并设置检票口，其中 E ， F 分别为 $\widehat{AD}$ ， $\widehat{BC}$ 上的动点， $EF \parallel AB$ ，且线段 EF 与线段 AB 在圆心 O_1 和 O_2 连线的同侧。已知弧线部分的修建费用为 200 元/米，直线部分的平均修建费用为 400 元/米。

(1) 若 $EF=80$ 米，则检票等候区域（图中阴影部分）面积为多少平方米？

(2) 试确定点 E 的位置，使得修建费用最低。



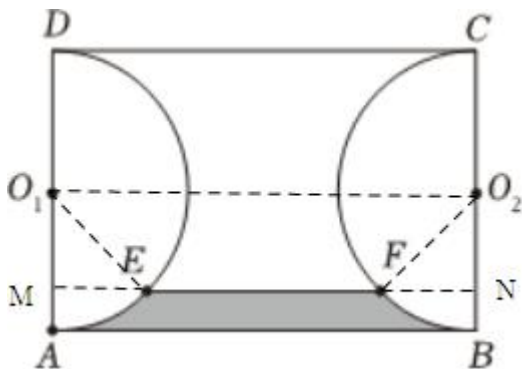
【答案】(1) $(4800 - 2000\sqrt{3} - \frac{800\pi}{3})$ 平方米；

(2) 当 $\angle AO_1E = \frac{\pi}{3}$ 时，修建费用最低。

【分析】(1) 设直线 EF 与矩形 $ABCD$ 交于 M, N 两点，连接 O_1E, O_2F, O_1O_2 ，结合题意可得梯形 O_1O_2FE 、矩形 AO_1O_2B 及扇形 O_1AE 和扇形 O_2FB 的面积，从而即可得阴影部分面积；

(2) 设 $\angle AO_1E = \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，从而可得修建费用 $f(\theta) = 16000(\theta + 3 - 2\sin\theta)$ ，利用导数求解即可。

【解答】解：(1) 如图，设直线 EF 与矩形 $ABCD$ 交于 M, N 两点，连接 O_1E, O_2F, O_1O_2 ，



则 $ME = 20$ 米， $O_1M = 20\sqrt{3}$ 米。

梯形 O_1O_2FE 的面积为 $\frac{1}{2} \times (120 + 80) \times 20\sqrt{3} = 2000\sqrt{3}$ (平方米)。

矩形 AO_1O_2B 的面积为 $120 \times 40 = 4800$ (平方米)，

由 $\angle AO_1E = \frac{\pi}{6}$ ，得扇形 O_1AE 和扇形 O_2FB 的面积均为 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times 1600 = \frac{400\pi}{3}$ (平方米)。

故阴影部分面积为 $(4800 - 2000\sqrt{3} - \frac{800\pi}{3})$ 平方米。

(2) 设 $\angle AO_1E = \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

则 $\widehat{AE} = \widehat{BF} = 40\theta$ ，

所以 $EF = 120 - 2 \times 40\sin\theta = 120 - 80\sin\theta$ ，

修建费用 $f(\theta) = 200 \times 80\theta + 400 \times (120 - 80\sin\theta) = 16000(\theta + 3 - 2\sin\theta)$ ，

所以 $f'(\theta) = 16000(1 - 2\cos\theta)$,

令 $f'(\theta) = 0$, 得 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 当 θ 变化时, $f'(\theta)$, $f(\theta)$ 的变化情况如下表:

θ	$(0, \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	-	0	+
$f(\theta)$	单调递减	极小值	单调递增

由上表可得当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 即 $\angle AO_1E = \frac{\pi}{3}$, $f(\theta)$ 有极小值, 也为最小值.

故当 $\angle AO_1E = \frac{\pi}{3}$ 时, 修建费用最低.

19. (16 分) 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - x$.

(1) 解不等式 $f(x) < \log_2 5 - 1$;

(2) 设函数 $g(x) = \log_2(a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a)$, 其中 $a > 0$, 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个交点, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(-1, 1)$;

(2) $\{a | a > 1\}$.

【分析】 (1) 根据对数函数的单调性解不等式;

(2) 运用函数与方程思想解题, 问题转化为关于 t 的方程 $(a-1)t^2 - \frac{4}{3}at - 1 = 0$ 在 $(\frac{4}{3}, +\infty)$ 上只有一解, 结合函数的性质即可求解.

【解答】 解: (1) 若 $\log_2(4^x + 1) - x < \log_2 5 - 1$,

则 $\log_2 \frac{(4^x + 1)}{5} < x - 1$,

所以 $\frac{(4^x + 1)}{5} > 2^{x-1}$, 所以 $4^x - 5 \times 2^{x-1} + 1 < 0$,

令 $t = 2^x$, 则有 $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 < 0$,

即 $2t^2 - 5t + 2 < 0$,

解得 $\frac{1}{2} < t < 2$,

所以 $\frac{1}{2} < 2^x < 2$,

所以 $-1 < x < 1$,

故 x 的范围为 $(-1, 1)$;

(2) 由于 $a > 0$, 所以 $g(x) = \log_2(a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a)$ 定义域为 $(\log_2 \frac{4}{3}, +\infty)$, 也就是满足 $2^x > \frac{4}{3}$,

因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个交点,

所以方程 $\log_2(4^x + 1) - x = \log_2(a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a)$ 在 $(\log_2 \frac{4}{3}, +\infty)$ 上只有一解,

则方程 $\frac{4^x + 1}{2^x} = a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a$ 在 $(\log_2 \frac{4}{3}, +\infty)$ 上只有一解, 令 $2^x = t$, 则 $t > \frac{4}{3}$,

因而问题等价于: 关于 t 的方程 $(a-1)t^2 - \frac{4}{3}at - 1 = 0$ (*) 在 $(\frac{4}{3}, +\infty)$ 上只有一解,

① 当 $a=1$ 时, 解得 $t = -\frac{3}{4} \notin (\frac{4}{3}, +\infty)$, 不合题意;

② 当 $0 < a < 1$ 时, 记 $h(t) = (a-1)t^2 - \frac{4}{3}at - 1$, 其图象的对称轴 $t = \frac{2a}{3(a-1)} < 0$,

所以函数 $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 而 $h(0) = -1$,

所以方程 (*) 在 $(\frac{4}{3}, +\infty)$ 无解;

③ 当 $a > 1$ 时, 记 $h(t) = (a-1)t^2 - \frac{4}{3}at - 1$, 其图象的对称轴 $t = \frac{2a}{3(a-1)} > 0$, $h(0) = -1$,

所以只需 $h(\frac{4}{3}) < 0$, 即 $\frac{16}{9}(a-1) - \frac{16}{9}a - 1 < 0$, 不等式恒成立,

此时 a 的范围为 $a > 1$,

综上所述, 所求 a 的取值范围为 $\{a | a > 1\}$.

20. (16 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2ax^2 + bx + 1}{e^x}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(1) = 1$, 且方程 $f(x) = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有解, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求函数的导数, 利用函数单调性和导数之间的关系即可求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 根据函数与方程之间的关系转化为函数存在零点问题, 构造函数, 求函数的导数, 利用函数极值和函数零点之间的关系进行转化求解即可.

【解答】 解: (1) 若 $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = (x^2 + bx + 1)e^{-x}$,

则 $f'(x) = (2x + b)e^{-x} - (x^2 + bx + 1)e^{-x} = -[x^2 + (b-2)x + 1 - b]e^{-x} = -(x-1)[x - (1-b)]e^{-x}$,

由 $f'(x) = 0$ 得 $-(x-1)[x-(1-b)] = 0$, 即 $x=1$ 或 $x=1-b$,

①若 $1-b=1$, 即 $b=0$ 时, $f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x} \leq 0$, 此时函数单调递减, 单调递减区间为 $(-\infty, +\infty)$.

②若 $1-b > 1$, 即 $b < 0$ 时, 由 $f'(x) = -(x-1)[x-(1-b)]e^{-x} > 0$ 得 $(x-1)[x-(1-b)] < 0$, 即 $1 < x < 1-b$,

此时函数单调递增, 单调递增区间为 $(1, 1-b)$,

由 $f'(x) = -(x-1)[x-(1-b)]e^{-x} < 0$ 得 $(x-1)[x-(1-b)] > 0$, 即 $x < 1$, 或 $x > 1-b$,

此时函数单调递减, 单调递减区间为 $(-\infty, 1), (1-b, +\infty)$,

③若 $1-b < 1$, 即 $b > 0$ 时, 由 $f'(x) = -(x-1)[x-(1-b)]e^{-x} > 0$ 得 $(x-1)[x-(1-b)] < 0$, 即 $1-b < x < 1$,

此时函数单调递增, 单调递增区间为 $(1-b, 1)$,

由 $f'(x) = -(x-1)[x-(1-b)]e^{-x} < 0$ 得 $(x-1)[x-(1-b)] > 0$, 即 $x < 1-b$, 或 $x > 1$,

此时函数单调递减, 单调递减区间为 $(-\infty, 1-b), (1, +\infty)$.

(2) 若 $f(1) = 1$, 则 $f(1) = (2a+b+1)e^{-1} = 1$,

即 $2a+b+1=e$, 则 $b=e-1-2a$,

若方程 $f(x) = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有解,

即方程 $f(x) = (2ax^2+bx+1)e^{-x} = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有解,

即 $2ax^2+bx+1=e^x$ 在 $(0, 1)$ 内有解,

即 $e^x - 2ax^2 - bx - 1 = 0$,

设 $g(x) = e^x - 2ax^2 - bx - 1$,

则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有零点,

设 x_0 是 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的一个零点,

则 $g(0) = 0, g(1) = 0$, 知函数 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 和 $(x_0, 1)$ 上不可能单调递增, 也不可能单调递减,

设 $h(x) = g'(x)$,

则 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 和 $(x_0, 1)$ 上存在零点,

即 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上至少有两个零点,

$g'(x) = e^x - 4ax - b, h'(x) = e^x - 4a$,

当 $a \leq \frac{1}{4}$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, $h(x)$ 不可能有两个及以上零点,

当 $a \geq \frac{e}{4}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, $h(x)$ 不可能有两个及以上零点,

当 $\frac{1}{4} < a < \frac{e}{4}$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \ln(4a) \in (0, 1)$,

则 $h(x)$ 在 $(0, \ln(4a))$ 上递减, 在 $(\ln(4a), 1)$ 上递增, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上存在最小值 $h(\ln(4a))$.

若 $h(x)$ 有两个零点, 则有 $h(\ln(4a)) < 0$, $h(0) > 0$, $h(1) > 0$,

$$h(\ln(4a)) = 4a - 4a \ln(4a) - b = 6a - 4a \ln(4a) + 1 - e, \quad \frac{1}{4} < a < \frac{e}{4},$$

$$\text{设 } \varphi(x) = \frac{3}{2}x - x \ln x + 1 - e, \quad (1 < x < e),$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{1}{2} - \ln x,$$

$$\text{令 } \varphi'(x) = \frac{1}{2} - \ln x = 0, \text{ 得 } x = \sqrt{e},$$

当 $1 < x < \sqrt{e}$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 此时函数 $\varphi(x)$ 递增,

当 $\sqrt{e} < x < e$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 此时函数 $\varphi(x)$ 递减,

$$\text{则 } \varphi(x)_{\max} = \varphi(\sqrt{e}) = \sqrt{e} + 1 - e < 0,$$

则 $h(\ln(4a)) < 0$ 恒成立,

$$\text{由 } h(0) = 1 - b = 2a - e + 2 > 0, \quad h(1) = e - 4a - b > 0,$$

$$\text{得 } \frac{e-2}{2} < a < \frac{1}{2},$$

当 $\frac{e-2}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时, 设 $h(x)$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 则 $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 递增,

在 (x_1, x_2) 上递减, 在 $(x_2, 1)$ 递增,

$$\text{则 } g(x_1) > g(0) = 0,$$

$$g(x_2) < g(1) = 0,$$

则 $g(x)$ 在 (x_1, x_2) 内有零点,

综上, 实数 a 的取值范围是 $(\frac{e-2}{2}, \frac{1}{2})$.