

2022-2023 学年江苏省徐州市高二（下）期末数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (5 分) 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 1\}$, $B = \{x | |x| \geq 2\}$, 则 ()
 A. $A \cap B = \{x | -3 \leq x \leq -2\}$ B. $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -2 < x < 1\}$
 C. $A \cap B = \{x | -3 < x < -2\}$ D. $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -3 < x < 2\}$
- (5 分) 已知 A, B, C, D 四点在平面 α 内, 且任意三点都不共线, 点 P 在 α 外, 且满足 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} - 3\overrightarrow{CP} + z\overrightarrow{DP} = \vec{0}$, 则 $z =$ ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- (5 分) 3 名男生和 2 名女生排成一排, 其中女生甲不排两端的不同排法有 ()
 A. 36 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 120 种
- (5 分) 某射手每次射击击中目标的概率是 0.6, 且各次射击的结果互不影响, 则该射手射击 30 次恰有 18 次击中目标的概率为 ()
 A. $0.6^{18} \times 0.4^{12}$
 B. $C_{30}^{18} 0.6^{18} \times 0.4^{12}$
 C. $C_{30}^{18} 0.4^{18} \times 0.6^{12}$
 D. $C_{30}^{18} 0.6^{18}$
- (5 分) 若 $a > 0$, $b > 0$, 则 $a+b \geq 6$ 的一个充分条件是 ()
 A. $\frac{a}{b} = 16$ B. $ab = 9$ C. $a^2 + b^2 = 4$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$
- (5 分) 已知集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f: A \rightarrow B$ 为从 A 到 B 的函数, 且 $f(x) = 1$ 有两个不同的实数根, 则这样的函数个数为 ()
 A. 50 B. 60 C. 70 D. 80
- (5 分) 已知 $a = 2.57$, $b = \sqrt{e} + 1$, $c = 1.1^{10}$, 则 ()
 A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$
- (5 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数, 且 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称, 则关于 x 的不等式 $f(x^2 - x) + f(2 - 2x) + x^2 - 3x < 0$ 的解集为 ()
 A. $(1, 2)$ B. $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3}{2}]$ C. $(1, \frac{3}{2}]$ D. $(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

（多选）9.（5 分）某市两万名高三学生数学期末统考成绩（满分 150 分）近似服从正态分布 $N(96, 256)$ ，则下列说法正确的是（ ）

（附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ 。）

- A. 该次成绩高于 144 分的学生约有 27 人
- B. 任取该市一名高三学生，其成绩低于 80 分的概率约为 0.023
- C. 若将该次成绩的前 2.28% 划定为优秀，则优秀分数线约为 128 分
- D. 试卷平均得分与试卷总分比值为该试卷难度，则该份试卷难度为 0.60

（多选）10.（5 分）已知 $(x+1)(x-2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则（ ）

- A. $a_1 = -16$
- B. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2$
- C. $a_1 + a_3 + a_5 = 1$
- D. $|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = 64$

（多选）11.（5 分）在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $\angle DAB = \angle A_1AB = \angle A_1AD = \frac{\pi}{3}$ ， $AA_1 = 3$ ， $AB = AD = 2$ ，则（ ）

- A. $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1
- B. $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$
- C. $AC_1 = \sqrt{17}$
- D. 点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{6}$

（多选）12.（5 分）已知随机事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}|\bar{B})$ ，则（ ）

- A. $P(\overline{AB}) = 2P(\bar{A}\bar{B})$
- B. $P(AB) = P(A)P(B)$
- C. $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{4}$
- D. $P(A|B) = \frac{1}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.（5 分）已知随机变量的概率分布如下：

ξ	0	1	2
-------	---	---	---

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-----	---------------	---------------	---------------

则 ξ 的方差为 _____.

14. (5分) 已知“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + tx + 2t - 3 > 0$ ”为假命题，则实数 t 的取值范围是 _____.

15. (5分) 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x) =$ _____.

① $f(x)$ 是偶函数；

② $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ；

③ 对 $\forall m, n \in (-\infty, 0]$, 且 $m \neq n$, $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 0$.

16. (5分) 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P, Q, R 分别在棱 AB, CC_1, D_1A_1 上, 且满足 $AP = CQ = D_1R = a$ ($0 < a < 1$), G 是 $\triangle PQR$ 的重心, 若直线 DG 与平面 CPQ 所成角为 45° , 则 a 的值为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 已知实数 n 满足 $\log_{\sqrt{3}} 81 - 4^{\log_2 \sqrt{n}} = \lg 4 + 2 \lg 5$.

(1) 求 n 的值；

(2) 求 $(2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中有理项的系数之和.

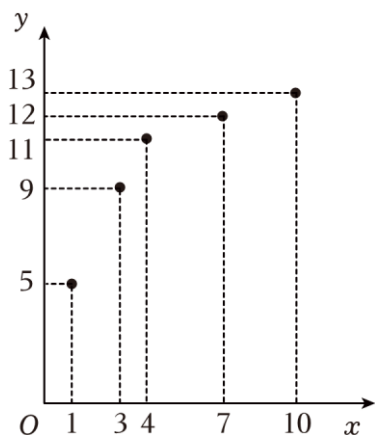
18. (12分) 已知一组数据 (x, y) 的散点图如图：

(1) 根据散点图计算 x, y 的相关系数 r , 并据此判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系？（若 $|r| > 0.75$, 则线性相关程度很高，可用线性回归模型拟合）

(2) 若可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的线性回归方程，并预测 $x=40$ 时的 $\hat{y}$ 值.

附：相关公式及参考数据： $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447$.

回归方程 $\hat{y} = bx + a$ 中， $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, a = \bar{y} - b\bar{x}$.



19. (12 分) 为了研究学生是否喜欢篮球运动与性别的关系，某校高二年级随机对该年级 50 名学生进行了跟踪调查，其中喜欢篮球运动的学生有 30 人，在余下的学生中，女生占 $\frac{3}{4}$ ，根据数据制成 2×2 列联表如下：

	男生	女生	合计
喜欢	20		30
不喜欢			20
合计			50

(1) 根据题意，完成上述 2×2 列联表，并判断是否有 99.5% 的把握认为喜欢篮球运动和性别有关？

(2) 在不喜欢篮球运动的 20 人中随机抽取 2 人继续跟踪调查，其中男生人数记为随机变量 X ，求 X 的分布列和数学期望。

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$ 。

$P(\chi^2 \geq k)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12 分) 甲袋中有 5 个白球和 4 个红球，乙袋中有 4 个白球和 5 个红球。先随机取一只袋，再从该袋中先后随机取 2 个球。

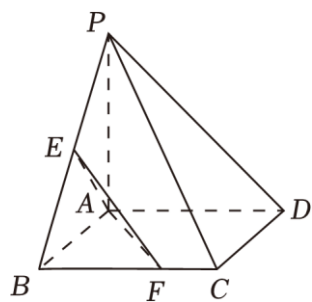
(1) 求第一次取出的球是红球的概率；

(2) 求第一次取出的球是红球的前提下，第二次取出的球是白球的概率。

21. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA=AB=2$ ， E ， F 分别在棱 PB ， BC 上。

(1) 当 E 为棱 PB 中点时，求证： $AE \perp EF$ ；

(2) 当 F 为棱 BC 中点时，求平面 AEF 与平面 PDC 所成的二面角余弦值的最大值。



22. (12 分) 已知函数 $f(x) = a|x-1| + x|x-a| - \frac{1}{2}$ ($a > 0$) 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$).

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $\lambda x_1 > x_2 x_3$, 求实数 λ 的取值范围.

2022-2023 学年江苏省徐州市高二（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 1\}$, $B = \{x | |x| \geq 2\}$, 则 ()

- A. $A \cap B = \{x | -3 \leq x \leq -2\}$ B. $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -2 < x < 1\}$
C. $A \cap B = \{x | -3 < x < -2\}$ D. $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -3 < x < 2\}$

【答案】D

【分析】求出集合 B，利用集合的运算可得出正确的选项。

【解答】解：因为 $B = \{x | |x| \geq 2\} = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -2 < x < 2\}$,

又因为 $A = \{x | -3 < x < 1\}$, 则 $A \cap B = \{x | -3 < x \leq -2\}$, AC 错误;

$A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -3 < x < 2\}$, B 错误, D 正确.

故选: D.

2. (5 分) 已知 A, B, C, D 四点在平面 α 内, 且任意三点都不共线, 点 P 在 α 外, 且满足 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} - 3\overrightarrow{CP} + z\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{0}$, 则 $z =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】B

【分析】根据空间向量的共面定理可求 z 的值.

【解答】解：因为 A, B, C, D 四点在平面 α 内, 点 P 在 α 外,

由空间向量的共面定理可知, 存在实数 x, y, m, 使得 $\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{PB} + y\overrightarrow{PC} + m\overrightarrow{PD}$ 且 $x + y + m = 1$,

因为 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} - 3\overrightarrow{CP} + z\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{0}$, 所以 $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} - z\overrightarrow{PD}$,

所以 $-1 + 3 - z = 1$, 解得 $z = 1$.

故选: B.

3. (5 分) 3 名男生和 2 名女生排成一排, 其中女生甲不排两端的不同排法有 ()

- A. 36 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 120 种

【答案】C

【分析】首先排好女生甲, 再将其余 4 人全排列, 按照分步乘法计数原理计算可得.

【解答】解：依题意首先将女生甲排到除两端外的三个位置中的一个位置，有 A_3^1 种排法，

其余 4 名同学全排列，有 A_4^4 种排法，

按照分步乘法计数原理可知一共有 $A_3^1 A_4^4 = 72$ 种排法。

故选：C。

4. (5 分) 某射手每次射击击中目标的概率是 0.6，且各次射击的结果互不影响，则该射手射击 30 次恰有 18 次击中目标的概率为 ()

A. $0.6^{18} \times 0.4^{12}$

B. $C_{30}^{18} 0.6^{18} \times 0.4^{12}$

C. $C_{30}^{18} 0.4^{18} \times 0.6^{12}$

D. $C_{30}^{18} 0.6^{18}$

【答案】B

【分析】根据题意，设 X 为射手在 30 次射击中击中目标的次数，则 $X \sim B(30, 0.6)$ ，进而由二项分布的概率公式来解。

【解答】解：根据题意，设 X 为射手在 30 次射击中击中目标的次数，则 $X \sim B(30, 0.6)$ ，

故在 30 次射击中，恰有 18 次击中目标的概率为 $P(X=18) = C_{30}^{18} 0.6^{18} \times 0.4^{12}$ 。

故选：B。

5. (5 分) 若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $a+b \geq 6$ 的一个充分条件是 ()

A. $\frac{a}{b} = 16$

B. $ab = 9$

C. $a^2 + b^2 = 4$

D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

【答案】B

【分析】由赋值法可判定 A，C，D 错误，由基本不等式可判定 B 正确。

【解答】解：对 A，因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\frac{a}{b} = 16$ ，所以不妨设 $a = 4$ ， $b = \frac{1}{4}$ ，则 $a+b = 4 + \frac{1}{4} < 6$ ，故 A 不正确；

对 B，因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $ab = 9$ ，所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 6$ ，当且仅当 $a=b=3$ 时等号成立，故 B 正确；

对 C，因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a^2 + b^2 = 4$ ，所以不妨设 $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ，则 $a+b = 1 + \sqrt{3} < 6$ ，故 C 不正确；

对 D，因为 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以不妨设 $a = b = 2$ ，则 $a+b = 4 < 6$ ，故 D 不正确。

故选：B。

6. (5分) 已知集合 $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $f: A \rightarrow B$ 为从 A 到 B 的函数, 且 $f(x)=1$ 有两个不同的实数根, 则这样的函数个数为 ()

A. 50 B. 60 C. 70 D. 80

【答案】D

【分析】由题意可知先从集合 A 中选两个元素与 1 对应, 然后集合 A 中剩下的 3 个元素, 每个元素都有 2 种对应形式, 再利用分步乘法原理可求得结果.

【解答】解: 由题意可知先从集合 A 中选两个元素与 1 对应, 有 $C_5^2=10$ 种方法,

然后集合 A 中剩下的 3 个元素, 每个元素都有 2 种对应形式, 则有 $2 \times 2 \times 2=8$ 种方法,

所以由分步乘法原理可知这样的函数有 $10 \times 8=80$ 个.

故选: D.

7. (5分) 已知 $a=2.57$, $b=\sqrt{e}+1$, $c=1.1^{10}$, 则 ()

A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

【答案】A

【分析】由于 $1.6^2 < e < 1.7^2$, 可得 $2.6 < \sqrt{e}+1 < 2.7$, 由 $c=1.1^{10}=(1+0.1)^{10}$, 利用二项式定理展开可得 $2.57 < c < 2.6$, 从而可比较出大小.

【解答】解: 因为 $1.6^2 < e < 1.7^2$, 所以 $1.6 < \sqrt{e} < 1.7$,

所以 $2.6 < \sqrt{e}+1 < 2.7$, 即 $2.6 < b < 2.7$,

因为 $c=1.1^{10}=(1+0.1)^{10}$

$$=C_{10}^0+C_{10}^1 \times 0.1+C_{10}^2 \times 0.1^2+C_{10}^3 \times 0.1^3+C_{10}^4 \times 0.1^4+C_{10}^5 \times 0.1^5$$

$$+C_{10}^6 \times 0.1^6+C_{10}^7 \times 0.1^7+C_{10}^8 \times 0.1^8+C_{10}^9 \times 0.1^9+C_{10}^{10} \times 0.1^{10}$$

$$=1+1+45 \times 0.1^2+120 \times 0.1^3+210 \times 0.1^4+252 \times 0.1^5+210 \times 0.1^6+120 \times 0.1^7+45 \times 0.1^8+10 \times 0.1^9+0.1^{10}$$

$$=2.57+0.021+0.00252+0.00021+0.000012+0.00000045+0.00000001+0.0000000001$$

所以 $2.57 < c < 2.6$,

所以 $b > c > a$,

故选: A.

8. (5分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数, 且 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称, 则关于 x 的不等式 $f(x^2-x)+f(2-2x)+x^2-3x < 0$ 的解集为 ()

A. $(1, 2)$ B. $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3}{2}]$ C. $(1, \frac{3}{2}]$ D. $(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$

【答案】C

【分析】利用函数的对称性，构造 $g(x) = f(x) + x$ ，原不等式可化为 $g(x^2 - x) < g(2x - 2)$ ，利用其单调性去函数符号解不等式即可。

【解答】解：由题意可知 $f(x) + f(-x) = 2$ ，设 $g(x) = f(x) + x$ ，显然有 $g(x) + g(-x) = 2$ ，又 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数，易知 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数。

原不等式可化为 $f(x^2 - x) + x^2 - x - 1 < -f(2 - 2x) - (2 - 2x) + 1 \Leftrightarrow g(x^2 - x) < g(2x - 2)$ ，

即 $-1 \leq x^2 - x < 2x - 2 \leq 1$ ，解不等式组可得 $x \in (1, \frac{3}{2}]$ 。

故选：C。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

（多选）9.（5 分）某市两万名高三学生数学期末统考成绩（满分 150 分）近似服从正态分布 $N(96, 256)$ ，则下列说法正确的是（ ）

（附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ 。）

- A. 该次成绩高于 144 分的学生约有 27 人
- B. 任取该市一名高三学生，其成绩低于 80 分的概率约为 0.023
- C. 若将该次成绩的前 2.28% 划定为优秀，则优秀分数线约为 128 分
- D. 试卷平均得分与试卷总分比值为该试卷难度，则该份试卷难度为 0.60

【答案】AC

【分析】根据正态分布的对称性以及 3σ 原则，结合选项一一分析即可得出答案。

【解答】解：设两万名高三学生数学期末统考成绩为 X ，则 $X \sim N(96, 256)$ ，

所以 $\mu = 96$ ， $\sigma = 16$ ，则 $\mu + 3\sigma = 144$ ，

所以 $P(X > 144) = \frac{1 - 0.9973}{2} = 0.00135$ ，

所以该次成绩高于 144 分的学生约有 $0.00135 \times 20000 = 27$ 人，故 A 正确；

$\mu = 96$ ， $\sigma = 16$ ， $\mu - \sigma = 80$ ，

所以 $P(X < 80) = \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865$ ，故 B 不正确；

因为 $\mu + 2\sigma = 128$ ， $\mu - 2\sigma = 64$ ，

所以 $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = P(64 < X \leq 128) \approx 0.9545$ ，

$$P(X > 128) = \frac{1-0.9545}{2} = 0.02275 \approx 2.28\%,$$

若将该次成绩的前 2.28% 划定为优秀，则优秀分数线约为 128 分，故 C 正确；

试卷平均得分即为 $\mu=96$ ，试卷总分 150，

所以 $\frac{96}{150}=0.64$ ，故 D 不正确。

故选：AC。

（多选）10.（5 分）已知 $(x+1)(x-2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ ，则（ ）

A. $a_1 = -16$

B. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2$

C. $a_1+a_3+a_5=1$

D. $|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=64$

【答案】ACD

【分析】由 $(x+1)(x-2)^4=x(x-2)^4+(x-2)^4$ ，写出 $(x-2)^4$ 展开式的通项，即可求出展开式的系数，即可得解。

【解答】解：因为 $(x+1)(x-2)^4=x(x-2)^4+(x-2)^4$ ，

又 $(x-2)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}(-2)^r$ ($0 \leq r \leq 4$ 且 $r \in \mathbf{N}$)，

$$\text{所以 } a_1 = (-2)^4 + C_4^3(-2)^3 = -16, \quad a_2 = C_4^3(-2)^3 + C_4^2(-2)^2 = -8,$$

$$a_3 = C_4^1(-2)^1 + C_4^2(-2)^2 = 16, \quad a_4 = C_4^1(-2)^1 + C_4^0(-2)^0 = -7,$$

$$a_5 = C_4^0(-2)^0 = 1, \quad a_0 = C_4^4(-2)^4 = 16, \text{ 故 A 正确；}$$

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = -14$ ，故 B 错误；

所以 $a_1+a_3+a_5 = -16+16+1=1$ ，故 C 正确；

所以 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=64$ ，故 D 正确。

故选：ACD。

（多选）11.（5 分）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\angle DAB = \angle A_1AB = \angle A_1AD = \frac{\pi}{3}$ ， $AA_1=3$ ， $AB=AD=2$ ，则（ ）

A. $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1

B. $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

C. $AC_1 = \sqrt{17}$

D. 点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{6}$

【答案】ABD

【分析】对于 A 项，利用图形的几何性质及空间向量的数量积并线面垂直的判定定理即可判断；对于 B 项，根据空间向量加法法则计算即可；对于 C 项，由空间向量的数量积计算即可判定；对于 D 项，利用三余弦定理结合已知条件计算即可；

【解答】解：如图所示，连接 AC ， BD ， AD_1 ，作 $A_1G \perp AC$ 于 G 点，作 $GJ \perp AB$ 于 J 点，

对于 A 项，由题意可得底面 $ABCD$ 为菱形，

则有 $AC \perp BD$ ，

$$\text{又 } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} - 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 0,$$

即 $AA_1 \perp BD$ ，

$\because AC \cap AA_1 = A$ ， $AC, AA_1 \subset \text{面 } ACC_1A_1$ ，故 $BD \perp \text{平面 } A_1ACC_1$ ，即 A 正确；

$$\text{对于 C 项，} \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1},$$

$\therefore$

$$|\overrightarrow{AC_1}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AA_1}|^2 + 2\cos \frac{\pi}{3} \times (|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| + |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AD}|) = 33$$

，故 $AC_1 = \sqrt{33}$ ，即 C 错误；

$$\text{对于 B 项，显然 } \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD_1},$$

在平行四边形 ADD_1A_1 中，又有 $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ ，即 B 正确；

对于 D 项，由 A 项 $BD \perp \text{平面 } A_1ACC_1$ ， $A_1G \subset \text{平面 } A_1ACC_1$ ，可得 $BD \perp A_1G$ ，

又 $AC \cap BD$ ， $AC, BD \subset \text{面 } ABCD$ ，故 $A_1G \perp \text{面 } ABCD$ ，

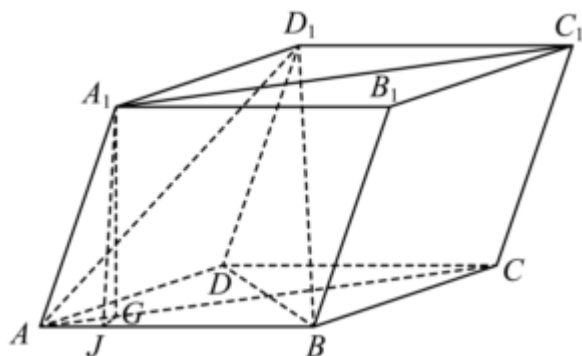
$AB \subset \text{面 } ABCD$ ，则 $A_1G \perp AB$ ， $A_1G \cap GJ = G$ ， $A_1G, GJ \subset \text{面 } A_1GJ$ ，

故 $AB \perp \text{面 } A_1GJ$ ， $A_1J \subset \text{面 } A_1GJ$ ， $AB \perp A_1J$ ，即 $\triangle A_1AG$ 、 $\triangle AGJ$ 、 $\triangle A_1AJ$ 均为直角三角形，

$$\therefore \cos \angle GAJ \cdot \cos \angle GAA_1 = \frac{AJ}{AG} \cdot \frac{AG}{AA_1} = \frac{AJ}{AA_1} = \cos \angle JAA_1 \Rightarrow \cos \angle GAA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } AG = \sqrt{3} \Rightarrow A_1G = \sqrt{A_1A^2 - AG^2} = \sqrt{6}, \text{ 即 D 正确.}$$

故选：ABD.



（多选）12.（5分）已知随机事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}|\bar{B})$, 则 ()

- A. $P(\bar{A}\bar{B}) = 2P(\bar{A}B)$ B. $P(AB) = P(A)P(B)$
 C. $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{4}$ D. $P(A|B) = \frac{1}{3}$

【答案】AB

【分析】利用条件概率公式和相互独立事件的概率公式对选项判断即可.

【解答】解：对于 A，因为 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}|\bar{B})$,

$$\text{所以 } \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = 3P(\bar{A}B), \quad \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}P(\bar{A}\bar{B}),$$

所以 $3P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{3}{2}P(\bar{A}\bar{B})$, 即 $P(\bar{A}\bar{B}) = 2P(\bar{A}B)$, 选项 A 正确;

对于 B，因为 $P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) = P(B) = \frac{1}{3}$ ①, $P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

又因为 $P(\bar{A}\bar{B}) = 2P(\bar{A}B)$, 所以 $2P(\bar{A}B) + P(\bar{A}B) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(\bar{A}B) = \frac{1}{6}$,

代入①可得: $\frac{1}{6} + P(AB) = \frac{1}{3}$, 解得 $P(AB) = \frac{1}{6}$,

又因为 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B)$, 选项 B 正确;

对于 C, $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, 选项 C 错误;

对于 D, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{1}{2}$, 选项 D 错误.

故选: AB.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. (5分) 已知随机变量的概率分布如下:

ξ	0	1	2
-------	---	---	---

P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-----	---------------	---------------	---------------

则 ξ 的方差为 $\frac{11}{16}$.

【答案】 $\frac{11}{16}$.

【分析】 根据分布列，利用期望和方差的公式求解.

【解答】 解：由分布列得： $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$,

所以 $D(\xi) = (0 - \frac{5}{4})^2 \times \frac{1}{4} + (1 - \frac{5}{4})^2 \times \frac{1}{4} + (2 - \frac{5}{4})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$.

故答案为： $\frac{11}{16}$.

14. (5分) 已知“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + tx + 2t - 3 > 0$ ”为假命题，则实数 t 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{4}]$.

【答案】 $(-\infty, -\frac{1}{4}]$.

【分析】 根据命题与命题的否定的真假性相反，可得“ $\forall x \in [1, 2], x^2 + tx + 2t - 3 \leq 0$ ”为真命题，再利用二次函数的图象特征即可求解.

【解答】 解：由“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + tx + 2t - 3 > 0$ ”为假命题，

可知“ $\forall x \in [1, 2], x^2 + tx + 2t - 3 \leq 0$ ”为真命题，

设 $f(x) = x^2 + tx + 2t - 3$ ，则有 $f(x) \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立，

则须满足 $\begin{cases} f(1) = 1 + t + 2t - 3 \leq 0 \\ f(2) = 4 + 2t + 2t - 3 \leq 0 \end{cases}$ ，解得： $t \leq -\frac{1}{4}$.

故答案为： $(-\infty, -\frac{1}{4}]$.

15. (5分) 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x) = |x|$ (答案不唯一，比如 $2|x|, 2|x|+1, \sqrt{|x|}$).

① $f(x)$ 是偶函数；

② $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ；

③ 对 $\forall m, n \in (-\infty, 0]$ ，且 $m \neq n$ ， $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 0$.

【答案】 $|x|$ (答案不唯一，比如 $2|x|, 2|x|+1, \sqrt{|x|}$).

【分析】 根据条件写出一个满足题意的函数即可.

【解答】 解：由③可知，在区间 $(-\infty, 0]$ 上， $f(x)$ 为减函数；

由 $|x| + |y| \geq |x+y|$ 可知 $f(x) = |x|$ 符合题意.

故答案为： $|x|$ (答案不唯一，比如 $2|x|, 2|x|+1, \sqrt{|x|}$).

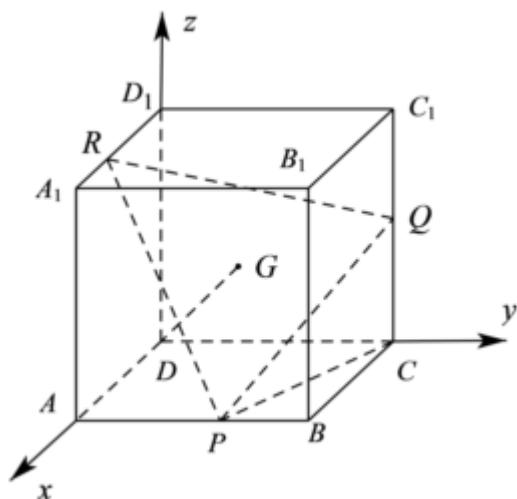
16. (5分) 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P, Q, R 分别在棱 AB, CC_1, D_1A_1 上，且满足 AP

$=CQ=D_1R=a$ ($0 < a < 1$), G 是 $\triangle PQR$ 的重心, 若直线 DG 与平面 CPQ 所成角为 45° , 则 a 的值为 $\sqrt{3}-1$.

【答案】 $\sqrt{3}-1$.

【分析】以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DD_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 利用空间向量求解即可.

【解答】解: 如图, 以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DD_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $D(0, 0, 0)$, $P(1, a, 0)$, $Q(0, 1, a)$, $R(a, 0, 1)$, $C(0, 1, 0)$,

因为 G 是 $\triangle PQR$ 的重心,

所以 $G(\frac{a+1}{3}, \frac{a+1}{3}, \frac{a+1}{3})$,

所以 $\overrightarrow{DG} = (\frac{a+1}{3}, \frac{a+1}{3}, \frac{a+1}{3})$,

设平面 CPQ 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{CP} = (1, a-1, 0)$, $\overrightarrow{CQ} = (0, 0, a)$,

所以 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{CP} = x + (a-1)y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CQ} = az = 0 \end{cases}$,

令 $y=1$, 则 $x=1-a$, $z=0$,

所以 $\vec{m} = (1-a, 1, 0)$,

因为直线 DG 与平面 CPQ 所成角为 45° ,

$$\text{所以 } \sin 45^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{m} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{DG}| |\overrightarrow{m}|} \right| = \left| \frac{\left(\frac{a+1}{3}, \frac{a+1}{3}, \frac{a+1}{3}\right) \cdot (1-a, 1, 0)}{\sqrt{3 \cdot \left(\frac{a+1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}} \right| =$$

$$\frac{\frac{(a+1)(1-a)}{3} + \frac{a+1}{3}}{\frac{a+1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{(1-a)^2 + 1}}, (0 < a < 1),$$

$$\text{所以 } \frac{2-a}{\sqrt{3}\sqrt{a^2-2a+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 化简得 } a^2+2a-2=0,$$

$$\text{解得 } a = \sqrt{3}-1 \text{ 或 } a = -\sqrt{3}-1 \text{ (舍去),}$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{3}-1.$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知实数 n 满足 $\log_{\sqrt{3}} 81 - 4^{\log_2 \sqrt{n}} = \lg 4 + 2 \lg 5$.

(1) 求 n 的值;

(2) 求 $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中有理项的系数之和.

【答案】 (1) 6.

(2) 225.

【分析】 (1) 根据对数的运算法则及指数对数恒等式计算可得结论.

(2) 写出展开式的通项, 即可得到 $r=0, 3, 6$ 时 T_{r+1} 是有理项, 从而得到其系数, 即可得解.

【解答】 解: (1) 因为 $\log_{\sqrt{3}} 81 - 4^{\log_2 \sqrt{n}} = \lg 4 + 2 \lg 5$,

$$\text{所以 } \log_{\sqrt{3}} 81 - 2^{2 \log_2 \sqrt{n}} = \lg 4 + \lg 25,$$

$$\text{即 } 6 - n = \lg 100 = 2, \therefore n = 6.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得, 二项式 } \left(2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n = \left(2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6,$$

$$\text{则它展开式的通项为 } T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r = 2^{6-r} C_6^r x^{6-\frac{4r}{3}}, (0 \leq r \leq 6 \text{ 且 } r \in \mathbb{N}).$$

$$\text{所以当 } r=0, 3, 6 \text{ 时, } T_{r+1} \text{ 是有理项, 系数分别为 } 2^6 C_6^0 = 64, 2^3 C_6^3 = 160, 2^0 C_6^6 = 1,$$

故展开式中有理项的系数之和为 $64+160+1=225$.

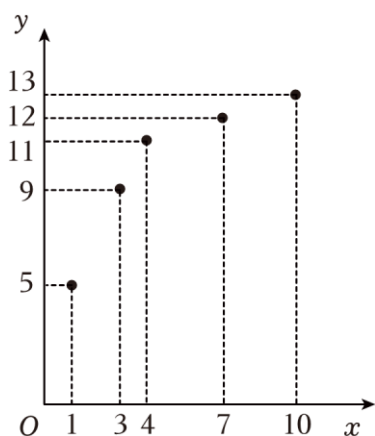
18. (12 分) 已知一组数据 (x, y) 的散点图如图:

(1) 根据散点图计算 x, y 的相关系数 r ，并据此判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系？（若 $|r| > 0.75$ ，则线性相关程度很高，可用线性回归模型拟合）

(2) 若可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的线性回归方程，并预测 $x=40$ 时的 $\hat{y}$ 值.

附：相关公式及参考数据：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447.$$

回归方程 $\hat{y} = bx + a$ 中，
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$



【答案】 (1) 0.897，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系；

(2) $\hat{y} = 0.8x + 6$ ，38.

【分析】 (1) 根据相关公式计算相关系数判定即可；

(2) 根据相关公式计算 b, a 可得回归方程，代入即可预测结果.

【解答】 解：(1) $\bar{x} = \frac{1+3+4+7+10}{5} = 5, \quad \bar{y} = \frac{5+9+11+12+13}{5} = 10,$

因为 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 50, \quad \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 40, \quad \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 40,$

所以
$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{40}{\sqrt{50} \times \sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.894 > 0.75,$$

所以可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.

$$(2) \text{ 因为 } b = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{40}{50} = 0.8, \bar{x} = 5, \bar{y} = 10,$$

所以 $a = 10 - 0.8 \times 5 = 6$ ，所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $y = 0.8x + 6$ 。

将 $x = 40$ 代入线性回归方程可得， $y = 0.8 \times 40 + 6 = 38$ 。

19. (12 分) 为了研究学生是否喜欢篮球运动与性别的关系，某校高二年级随机对该年级 50 名学生进行了跟踪调查，其中喜欢篮球运动的学生有 30 人，在余下的学生中，女生占 $\frac{3}{4}$ ，根据数据制成 2×2 列联表如下：

	男生	女生	合计
喜欢	20		30
不喜欢			20
合计			50

(1) 根据题意，完成上述 2×2 列联表，并判断是否有 99.5% 的把握认为喜欢篮球运动和性别有关？

(2) 在不喜欢篮球运动的 20 人中随机抽取 2 人继续跟踪调查，其中男生人数记为随机变量 X ，求 X 的分布列和数学期望。

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

$P(\chi^2 \geq k)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【答案】 (1) 表格见解析，有 99.5% 的把握认为喜欢篮球运动和性别有关；

(2) 分布列见解析， $\frac{1}{2}$ 。

【分析】 (1) 根据条件补充表格，并利用卡方公式计算即可判定；

(2) 根据离散型随机变量的取值计算其对应概率得出分布列，再由期望公式计算即可。

【解答】 解：(1) 由题意， 2×2 列联表如下：

	男生	女生	合计
喜欢	20	10	30
不喜欢	5	15	20

合计	25	25	50
----	----	----	----

提出假设 H_0 : 性别与是否喜欢篮球运动无关,

根据列联表中的数据可以求得 $\chi^2 = \frac{50 \times (20 \times 15 - 10 \times 5)^2}{30 \times 20 \times 25 \times 25} = \frac{25}{3} \approx 8.333$,

因为当 H_0 成立时, $\chi^2 \geq 7.879$ 的概率约为 0.005,

所以有 99.5% 的把握认为喜欢篮球运动和性别有关.

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_5^0 C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{21}{38}, \quad P(X=1) = \frac{C_5^1 C_{15}^1}{C_{20}^2} = \frac{15}{38}, \quad P(X=2) = \frac{C_5^2 C_{15}^0}{C_{20}^2} = \frac{1}{19},$$

故随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{21}{38}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{1}{19}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{21}{38} + 1 \times \frac{15}{38} + 2 \times \frac{1}{19} = \frac{1}{2}.$$

20. (12 分) 甲袋中有 5 个白球和 4 个红球, 乙袋中有 4 个白球和 5 个红球. 先随机取一只袋, 再从该袋中先后随机取 2 个球.

(1) 求第一次取出的球是红球的概率;

(2) 求第一次取出的球是红球的前提下, 第二次取出的球是白球的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$;

(2) $\frac{5}{9}$.

【分析】 (1) 根据全概率公式计算即可;

(2) 根据全概率公式和条件概率公式计算即可.

【解答】 解: (1) 设“取出的是甲袋”为事件 A_1 , “取出的是乙袋”为事件 A_2 , “第一次取出的球是红球”为事件 B , “第二次取出的球是白球”为事件 C ,

$$\text{则 } P(A_i) = \frac{1}{2} (i=1, 2),$$

$$\text{由题意易得 } P(B|A_1) = \frac{4}{9}, \quad P(B|A_2) = \frac{5}{9},$$

$$\text{所以 } P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \right) = \frac{1}{2},$$

即第一次取出的球是红球的概率为 $\frac{1}{2}$;

$$(2) P(BC | A_1) = \frac{4 \times 5}{A_9^2} = \frac{5}{18}, \quad P(BC | A_2) = \frac{5 \times 4}{A_9^2} = \frac{5}{18},$$

$$\text{故 } P(BC) = P(A_1)P(BC | A_1) + P(A_2)P(BC | A_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{18} + \frac{5}{18}\right) = \frac{5}{18},$$

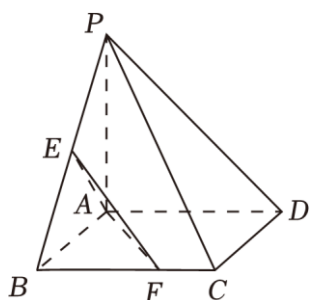
$$\text{所以 } P(C | B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9},$$

故第一次取出的球是红球的前提下，第二次取出的球是白球的概率为 $\frac{5}{9}$.

21. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA=AB=2$ ， E ， F 分别在棱 PB ， BC 上.

(1) 当 E 为棱 PB 中点时，求证： $AE \perp EF$ ；

(2) 当 F 为棱 BC 中点时，求平面 AEF 与平面 PDC 所成的二面角余弦值的最大值.



【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

【分析】(1) 以 AB ， AD ， AP 所在直线分别为 x ， y ， z 轴，建立空间坐标系 $A-xyz$ ，设 $F(2, a, 0)$

($0 \leq a \leq 2$)，由 $\vec{AE} \cdot \vec{EF} = 0$ ，即可证明.

(2) 分别求出平面 AEF 与平面 PDC 的法向量，由二面角的向量公式结合二次函数的性质，即可得出答案.

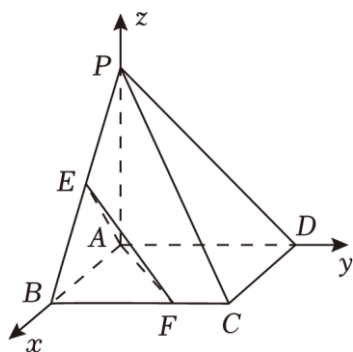
【解答】解：(1) 证明：因为底面 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AB \perp AD$ ，

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， AB ， $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PA \perp AB$ ， $PA \perp AD$ ，

以 AB ， AD ， AP 所在直线分别为 x ， y ， z 轴，建立空间坐标系 $A-xyz$ ，



则 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$,

当 E 为棱 PB 中点时, $E(1, 0, 1)$,

设 $F(2, a, 0)$ ($0 \leq a \leq 2$),

所以 $\overrightarrow{AE} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{EF} = (1, a, -1)$,

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = (1, 0, 1) \cdot (1, a, -1) = 1 \times 1 + 0 \times a + 1 \times (-1) = 0$,

所以 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{EF}$,

所以 $AE \perp EF$.

(2) 当 F 为棱 BC 中点时, $F(2, 1, 0)$,

设 $E(b, 0, 2-b)$ ($0 \leq b \leq 2$),

所以 $\overrightarrow{AE} = (b, 0, 2-b)$, $\overrightarrow{AF} = (2, 1, 0)$, $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$, $\overrightarrow{DC} = (2, 0, 0)$,

设平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{n_1} = 2y_1 - 2z_1 = 0 \\ \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{n_1} = 2x_1 = 0 \end{cases},$$

取 $z_1 = 1$, 则 $y_1 = 1$, $x_1 = 0$,

所以 $\overrightarrow{n_1} = (0, 1, 1)$,

设平面 AEF 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{n_2} = bx_2 + (2-b)z_2 = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{n_2} = 2x_2 + y_2 = 0 \end{cases},$$

取 $z_2 = b$, 则 $y_2 = -2(b-2)$, $x_2 = b-2$,

所以 $\overrightarrow{n_2} = (b-2, -2(b-2), b)$,

设平面 AEF 与平面 PDC 所成角为 α ,

$$\text{则} |\cos \alpha| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right| = \left| \frac{-2(b-2)+b}{\sqrt{2}\sqrt{5(b-2)^2+b^2}} \right| = \frac{4-b}{2\sqrt{3b^2-10b+10}},$$

$$\text{令 } t = 4 - b \in [2, 4], \text{ 则 } |\cos \alpha| = \frac{t}{2\sqrt{3t^2-14t+18}} = \frac{t}{2\sqrt{\frac{18}{t^2}-\frac{14}{t}+3}},$$

$$\text{所以当 } \frac{1}{t} = \frac{7}{18}, \text{ 即 } b = \frac{10}{7} \text{ 时, } |\cos \alpha| \text{ 取最大值 } \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以平面 } AEF \text{ 与平面 } PDC \text{ 所成的二面角余弦值的最大值为 } \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a|x-1| + x|x-a| - \frac{1}{2}$ ($a > 0$) 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$).

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $\lambda x_1 > x_2 x_3$, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】 (1) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; (2) $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}+1}{2})$.

【分析】 (1) 分类讨论去绝对值符号, 根据二次函数的图象与性质及零点存在定理计算即可;

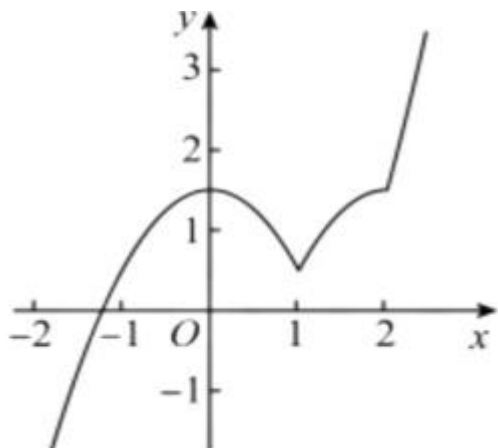
(2) 结合 (1) 的结论, 分类讨论找出零点所属分段函数的哪一段, 计算即可.

【解答】 解: (1) ①当 $a=1$ 时, $f(x) = |x-1| + x|x-1| - \frac{1}{2} = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2} - x^2, & x < 1 \end{cases}$,

$$\text{令 } f(x) = 0, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

所以 $f(x)$ 有三个零点, 符合题意;

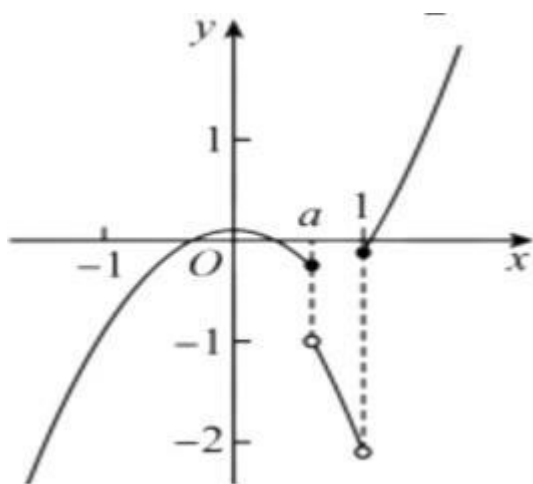
$$\text{②当 } a > 1 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} x^2 - a - \frac{1}{2}, & x \geq a \\ -x^2 + 2ax - a - \frac{1}{2}, & 1 < x < a \\ -x^2 + a - \frac{1}{2}, & x \leq 1 \end{cases}$$



所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，如图所示，绘制函数草图，

要满足函数有三个零点，则 $\begin{cases} f(0) = a - \frac{1}{2} > 0 \\ f(1) = a - \frac{3}{2} < 0 \end{cases}$ ，解得 $a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ；

③当 $0 < a < 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} x^2 - a - \frac{1}{2}, & x \geq 1 \\ x^2 - 2ax + a - \frac{1}{2}, & a < x < 1, \\ -x^2 + a - \frac{1}{2}, & x \leq a \end{cases}$



所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, a)$ 上单调递减，在 $(a, +\infty)$ 上单调递增，如图所示，绘制函数草图，

要满足函数有三个零点，则 $\begin{cases} f(0) = a - \frac{1}{2} > 0 \\ f(a) = -a^2 + a - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$ ，解得 $a > \frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{1}{2} < a < 1$ ，

综上所述， a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ；

(2) 当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时， $f(a) = -a^2 + a - \frac{1}{2} < 0$ ，

当 $1 < a < \frac{3}{2}$ 时， $f(1) = a - \frac{3}{2} < 0$ ，

所以 x_1, x_2 是函数 $f(x) = -x^2 + a - \frac{1}{2}$ 的两个零点，所以 $x_2 = -x_1 > 0$ ，

因为 $\lambda x_1 > x_2 x_3$ ，所以 $\lambda < -x_3$ ，

①当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时， x_3 为函数 $f(x) = x^2 - a - \frac{1}{2}$ 较大零点，

所以 $x_3 = \sqrt{a + \frac{1}{2}} \in (1, \frac{\sqrt{6}}{2}]$, 所以 $\lambda < -\frac{\sqrt{6}}{2}$;

②当 $1 < a \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 时, $f(a) \leq 0$, 所以 x_3 为 $f(x) = x^2 - a - \frac{1}{2}$ 较大零点,

所以 $x_3 = \sqrt{a + \frac{1}{2}} \in (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}]$, 所以 $\lambda < -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

③当 $\frac{\sqrt{3}+1}{2} < a < \frac{3}{2}$ 时, $f(a) > 0$, 所以 x_3 为 $f(x) = -x^2 + 2ax - a - \frac{1}{2}$ 较小零点,

所以 $x_3 = a - \sqrt{a^2 - a - \frac{1}{2}} = a - \frac{1}{2} - \sqrt{(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{a - \frac{1}{2} + \sqrt{(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}$,

将其看成关于 a 的函数, 可知其在 $(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3}{2})$ 上单调递减,

所以 $x_3 \in (1, \frac{\sqrt{3}+1}{2})$, 所以 $\lambda \leq -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

综上所述, 实数 λ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}+1}{2})$.