

2024 年江苏省盐城市东台市安丰中学等六校高考数学联考试卷（4 月份）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

- （5 分）已知集合 $M = \{x | 2x - 3 > 0\}$, $N = \{y | y = e^x + 1\}$, 则 ()
 - $M \cap N = (1, \frac{3}{2})$
 - $M \cup N = (\frac{3}{2}, +\infty)$
 - $\complement_{\mathbb{N}} M = (1, \frac{3}{2})$
 - $M \subseteq N$
- （5 分）设 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{4+3i}{i}$, 则 z 在复平面上对应的点在 ()
 - 第四象限
 - 第三象限
 - 第二象限
 - 第一象限
- （5 分）已知随机变量 X_1, X_2 分别满足二项分布 $X_1 \sim B(n_1, \frac{1}{3})$, $X_2 \sim B(n_2, \frac{1}{3})$, 则“ $n_1 > n_2$ ”是“ $D(X_1) > D(X_2)$ ”的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- （5 分）现从含甲、乙在内的 6 名特种兵中选出 3 人去参加抢险，则在甲被选中的前提下，乙也被选中的概率为 ()
 - $\frac{1}{6}$
 - $\frac{1}{5}$
 - $\frac{2}{5}$
 - $\frac{3}{5}$
- （5 分）住房的许多建材都会释放甲醛．甲醛是一种无色、有着刺激性气味的气体，对人体健康有着极大的危害．新房入住时，空气中甲醛浓度不能超过 0.08 mg/m^3 ，否则，该新房达不到安全入住的标准．若某套住房自装修完成后，通风 x ($x=1, 2, 3, \dots, 50$) 周与室内甲醛浓度 y (单位: mg/m^3) 之间近似满足函数关系式 $y = 0.48 - 0.1f(x)$ ($x \in \mathbb{N}^*$), 其中 $f(x) = \log_a[k(x^2 + 2x + 1)]$ ($k > 0, x=1, 2, 3, \dots, 50$), 且 $f(2) = 2, f(8) = 3$, 则该住房装修完成后要达到安全入住的标准，至少需要通风 ()
 - 17 周
 - 24 周
 - 28 周
 - 26 周
- （5 分）已知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点，若过 F_1 的直线与圆 $(x - \frac{1}{2}c)^2 + y^2 = c^2$ 相切，与 C 在第一象限交于点 P , 且 $PF_2 \perp x$ 轴，则 C 的离心率为 ()

- A. $2\sqrt{5}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. $\sqrt{5}$

7. (5 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B = \cos A \sin C$, P 为线段 AB 上的动点, 且

$\vec{CP} = x \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} + y \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. $2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

8. (5 分) 设 A, B 是半径为 $\sqrt{2}$ 的球体 O 表面上的两定点, 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 球体 O 表面上动点 M 满足

$MA = \sqrt{3} MB$, 则点 M 的轨迹长度为 ()

- A. $\frac{4\sqrt{6}}{7} \pi$ B. $\frac{2\sqrt{30}}{5} \pi$ C. $\frac{4\sqrt{15}}{11} \pi$ D. $\frac{2\sqrt{33}}{11} \pi$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (6 分) 已知 p, q 为函数 $f(x) = |lgx| - t$ 的两个不相同的零点, 则下列式子一定正确的是 ()

- A. $p^2 + q^2 < 2$ B. $2^p + 2^q > 8$
C. $\log_3 p \cdot \log_3 q < 0$ D. $pq = 1$

(多选) 10. (6 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$, $a = 2$, 则 ()

- A. $b \cos A = 2a$
B. $b^2 + c^2 = 8$
C. 角 A 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
D. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

(多选) 11. (6 分) 在平面直角坐标系中, 定义 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 为点 $A(x_1, y_1)$ 到点 $B(x_2, y_2)$ 的“折线距离”. 点 O 是坐标原点, 点 Q 在直线 $2x + y - 2\sqrt{5} = 0$ 上, 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 点 R 在抛物线 $y^2 = -4x$ 上. 下列结论中正确的结论为 ()

- A. $d(O, Q)$ 的最小值为 2
B. $d(O, P)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$
C. $d(P, Q)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D. $d(R, Q)$ 的最小值为 $\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. (5分) 已知 $(x + \frac{m}{x})^6$ 的二项展开式中, x^4 项的系数是 18, 则 m 的值为 _____.

13. (5分) 若函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内有且仅有两条对称轴, 一个对称中心, 则实数 ω 的取值范围是 _____.

14. (5分) 记 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 的数列 $\{x_n\}$ 称为“牛

顿数列”. 若函数 $f(x) = x^2 - x$, 数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列, 设 $a_n = \ln \frac{x_n}{x_n - 1}$, 已知 $a_1 = 2, x_n > 1$, 则 $a_2 =$ _____,

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若不等式 $t S_n - 14 \leq S_n^2$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则 t 的最大值为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. (13分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x - x$.

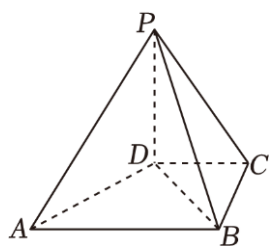
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

16. (15分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为梯形, 其中 $AB \parallel CD$, $\angle BCD = 60^\circ$, $AB = 2BC = 2CD = 4$, 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: $AD \perp PD$;

(2) 若 $AB \perp PD$, 且 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 2, 求平面 PBC 与平面 PAD 所成二面角的余弦值.



17. (15分) 2023 年 6 月 7 日, 21 世纪汽车博览会在上海举行, 已知某汽车模型公司共有 25 个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件 A 为小明取到红色外观的模型, 事件 B 为小明取到

棕色内饰的模型，求 $P(B)$ 和 $P(B|A)$ ，并判断事件 A 和事件 B 是否独立；

(2) 该公司举行了一个抽奖活动，规定在一次抽奖中，每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型，给出以下假设：

假设 1：拿到的两个模型会出现三种结果，即外观和内饰均为同色、外观和内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色；

假设 2：按结果的可能性大小，概率越小奖项越高；

假设 3：该抽奖活动的奖金额为：一等奖 600 元，二等奖 300 元、三等奖 150 元；

请你分析奖项对应的结果，设 X 为奖金额，写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望。

18. (17 分) 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列， $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等差数列， $a_3=b_2$ 且 $a_4=b_1+b_3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 将 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中的所有项按从小到大的顺序排列组成新数列 $\{c_n\}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 50 项和 S_{50} ；

(3) 设数列 $\{d_n\}$ 的通项公式为 $d_n = \begin{cases} a_{n+1}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{b_n}{2} + 2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ，记 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若

$3T_{2n-1} \geq 2^{2n+1} + 3nt - 14$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立，求正数 t 的取值范围。

19. (17 分) (理) 在平面直角坐标系 xOy 中，若在曲线 C_1 的方程 $F(x, y) = 0$ 中，以 $(\lambda x, \lambda y)$ (λ 为正实数) 代替 (x, y) 得到曲线 C_2 的方程 $F(\lambda x, \lambda y) = 0$ ，则称曲线 C_1 、 C_2 关于原点“伸缩”，变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$ 称为“伸缩变换”， λ 称为伸缩比。

(1) 已知曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ，伸缩比 $\lambda = 2$ ，求 C_1 关于原点“伸缩变换”后所得曲线 C_2 的方程；

(2) 射线 l 的方程 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ($x \geq 0$)，如果椭圆 $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 经“伸缩变换”后得到椭圆 C_2 ，若射线 l 与椭圆 C_1 、 C_2 分别交于两点 A 、 B ，且 $|AB| = \sqrt{2}$ ，求椭圆 C_2 的方程；

(3) 对抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x$ ，作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_1x, \lambda_1y)$ ，得抛物线 $C_2: y^2 = 2p_2x$ ；对 C_2 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_2x, \lambda_2y)$ 得抛物线 $C_3: y^2 = 2p_3x$ ，如此进行下去，对抛物线 $C_n: y^2 = 2p_nx$ 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_nx, \lambda_ny)$ ，得抛物线 $C_{n+1}: y^2 = 2p_{n+1}x$ ， $\dots$ 。若 $p_1 = 1$ ， $\lambda_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ，求数列 $\{p_n\}$ 的通项公式 p_n 。

2024 年江苏省盐城市东台市安丰中学等六校高考数学联考试卷（4 月份）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.（5 分）已知集合 $M = \{x | 2x - 3 > 0\}$ ， $N = \{y | y = e^x + 1\}$ ，则（ ）

- A. $M \cap N = (1, \frac{3}{2})$ B. $M \cup N = (\frac{3}{2}, +\infty)$
C. $\complement_{\mathbb{N}} M = (1, \frac{3}{2})$ D. $M \subseteq N$

【答案】D

【分析】先求解不等式和求函数的值域得到集合 M ， N 的范围，再根据交并补和集合间的关系的定义分别判断各选项即得．

【解答】解：∵ $M = \{x | 2x - 3 > 0\} = (\frac{3}{2}, +\infty)$ ， $N = \{y | y > 1\} = (1, +\infty)$ ，

因 $M \cap N = (\frac{3}{2}, +\infty)$ ，故 A 项错误；

由 $M \cup N = (1, +\infty)$ ，知 B 项错误；

由 $\complement_{\mathbb{N}} M = (1, \frac{3}{2}]$ ，知 C 项错误；

因 $M \subseteq N$ ，故 D 项正确．

故选：D．

2.（5 分）设 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{4+3i}{i}$ ，则 z 在复平面上对应的点在（ ）

- A. 第四象限 B. 第三象限 C. 第二象限 D. 第一象限

【答案】A

【分析】利用复数的除法解得复数 z ，由几何意义求其在复平面上对应的点所在象限．

【解答】解：因为复数 $z = \frac{4+3i}{i} = \frac{4i+3i^2}{i^2} = \frac{4i-3}{-1} = 3-4i$ ，

则 z 在复平面上对应的点为 $(3, -4)$ ，在第四象限．

故选：A．

3.（5 分）已知随机变量 X_1 ， X_2 分别满足二项分布 $X_1 \sim B(n_1, \frac{1}{3})$ ， $X_2 \sim B(n_2, \frac{1}{3})$ ，则“ $n_1 > n_2$ ”是“ $D(X_1) > D(X_2)$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【分析】根据二项分布方差的计算的公式求出 $D(X_1)$ 和 $D(X_2)$ ，进而由充分必要条件的定义判断即可。

【解答】解：根据题意，因为随机变量 X_1, X_2 分别满足二项分布 $X_1 \sim B(n_1, \frac{1}{3})$, $X_2 \sim B(n_2, \frac{1}{3})$ ，
由二项分布的性质， $D(X_1) = n_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}n_1$ ，同理 $D(X_2) = \frac{2}{9}n_2$ ，

若 $n_1 > n_2$ ，则有 $\frac{2}{9}n_1 > \frac{2}{9}n_2$ ，即 $D(X_1) > D(X_2)$ ，

反之，若 $D(X_1) > D(X_2)$ ，即 $\frac{2}{9}n_1 > \frac{2}{9}n_2$ ，必有 $n_1 > n_2$ ，

故“ $n_1 > n_2$ ”是“ $D(X_1) > D(X_2)$ ”充要条件。

故选：C。

- 4.（5分）现从含甲、乙在内的6名特种兵中选出3人去参加抢险，则在甲被选中的前提下，乙也被选中的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$
- B. $\frac{1}{5}$
- C. $\frac{2}{5}$
- D. $\frac{3}{5}$

【答案】C

【分析】设甲被选中为事件A，乙被选中为事件B，再根据条件概率公式可解。

【解答】解：现从含甲、乙在内的6名特种兵中选出3人去参加抢险，

设甲被选中为事件A，乙被选中为事件B，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

则在甲被选中的前提下，乙也被选中的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{5}$ 。

故选：C。

- 5.（5分）住房的许多建材都会释放甲醛。甲醛是一种无色、有着刺激性气味的气体，对人体健康有着极大的危害。新房入住时，空气中甲醛浓度不能超过 $0.08\text{mg}/\text{m}^3$ ，否则，该新房达不到安全入住的标准。若某套住房自装修完成后，通风 x ($x=1, 2, 3, \dots, 50$) 周与室内甲醛浓度 y (单位： mg/m^3) 之间近似

满足函数关系式 $y=0.48-0.1f(x)$ ($x \in \mathbf{N}^*$), 其中 $f(x)=\log_a[k(x^2+2x+1)]$ ($k>0, x=1, 2, 3, \dots, 50$), 且 $f(2)=2, f(8)=3$, 则该住房装修完成后要达到安全入住的标准, 至少需要通风 ()

- A. 17 周 B. 24 周 C. 28 周 D. 26 周

【答案】D

【分析】由已知数据求得参数 a, k , 然后解不等式 $f(x) \geq 4$, 即可得出答案.

【解答】解: $f(x)=\log_a[k(x+1)^2]=\log_a k+2\log_a(x+1)$,

$$\therefore f(2)=2, f(8)=3,$$

$$\therefore \log_a k+2\log_a(2+1)=2, \log_a k+2\log_a(8+1)=3,$$

两式相减得 $\log_a 9=1$, 则 $a=9$,

$$\therefore \log_a k+2=3, k=9,$$

该住房装修完成后要达到安全入住的标准, 则 $0.48-0.1f(x) \leq 0.08$,

则 $f(x) \geq 4$, 即 $1+2\log_9(x+1) \geq 4$, 解得 $x \geq 26$,

故至少需要通风 26 周.

故选: D.

6. (5 分) 已知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左右焦点, 若

过 F_1 的直线与圆 $(x-\frac{1}{2}c)^2 + y^2 = c^2$ 相切, 与 C 在第一象限交于点 P , 且 $PF_2 \perp x$ 轴, 则 C 的离心率为 ()

- A. $2\sqrt{5}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【分析】由 $PF_2 \perp x$ 轴, 结合双曲线的方程, 求得 P 的坐标, 直线 PF_1 的方程, 圆的圆心和半径, 由直线和圆相切的条件, 化简整理, 解方程可得所求离心率.

【解答】解: 设 $F_2(c, 0)$, 令 $x=c$, 可得 $y^2=b^2(\frac{c^2}{a^2}-1)$, 解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$,

可得 $P(c, \frac{b^2}{a})$, 直线 PF_1 的方程为 $y=\frac{b^2}{2ac}(x+c)$,

又圆 $(x-\frac{1}{2}c)^2 + y^2 = c^2$ 的圆心为 $(\frac{1}{2}c, 0)$, 半径为 c ,

直线 PF_1 与圆相切，可得 $\frac{b^2(\frac{1}{2}c+c)}{\sqrt{b^4+4a^2c^2}}=c$,

化为 $\sqrt{5}b^2=4ac$ ，即 $\sqrt{5}(c^2-a^2)=4ac$ ，

可得 $\sqrt{5}e^2-4e-\sqrt{5}=0$ ，

解得 $e=\sqrt{5}$ （舍去）。

故选：D。

7.（5分）在 $\triangle ABC$ 中， $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin B=\cos A\sin C$ ， P 为线段 AB 上的动点，且

$\vec{CP}=x\frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}+y\frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$ ，则 $\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{3}}{y}$ 的最小值为（ ）

- A. $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. $2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【分析】由已知结合正弦定理求得 a, b, c 的值，建立平面直角坐标系，再由向量等式求得 $\frac{x}{\sqrt{3}}+y=1$ ，

然后利用基本不等式求最值。

【解答】解： $\because \sin B=\cos A\sin C$ ， $\therefore$ 由正弦定理可得， $b=c\cos A$ ，

再由余弦定理可得， $b=c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ，整理得 $a^2+b^2=c^2$ ，即 $\angle C=90^\circ$ ，

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore \vec{AB}\cdot\vec{AC}=3$ ，即 $|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos\angle BAC=b^2=3$ ，得 $b=\sqrt{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，得 $a=1$ ，从而 $c=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ 。

以 CA 所在直线为 x 轴， CB 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

可得 $C(0, 0)$ ， $A(\sqrt{3}, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，

P 为线段 AB 上的一点，则存在实数 λ 使得 $\vec{CP}=\lambda\vec{CA}+(1-\lambda)\vec{CB}=(\sqrt{3}\lambda, 1-\lambda)$ ， $(0\leq\lambda\leq 1)$ ，

设 $\frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}=\vec{e}_1$ ， $\frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}=\vec{e}_2$ ， $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ ， $\vec{e}_1=(1, 0)$ ， $\vec{e}_2=(0, 1)$ ，

由 $\vec{CP}=x\frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}+y\frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}=(x, 0)+(0, y)=(x, y)$ ，

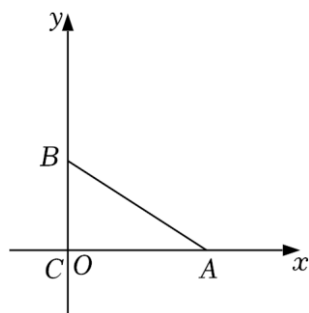
得 $x=\sqrt{3}\lambda$ ， $y=1-\lambda$ ，则 $\frac{x}{\sqrt{3}}+y=1$ ($x\geq 0, y\geq 0$)，

求 $\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y}$ 的最小值，则 x, y 均不为 0，

$$\text{则 } \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + y\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2.$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立.

故选：A.



8. (5 分) 设 A, B 是半径为 $\sqrt{2}$ 的球体 O 表面上的两定点，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ，球体 O 表面上动点 M 满足

$MA = \sqrt{3} MB$ ，则点 M 的轨迹长度为 ()

- A. $\frac{4\sqrt{6}}{7}\pi$ B. $\frac{2\sqrt{30}}{5}\pi$ C. $\frac{4\sqrt{15}}{11}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{33}}{11}\pi$

【答案】B

【分析】 先建立平面直角坐标系确定 M 轨迹，转化为空间中的阿氏球，利用两球相交求相交圆周长即可.

【解答】 解：以 AOB 所在的平面建立平面直角坐标系， AB 所在直线为 x 轴， AB 的垂直平分线为 y 轴，则 $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ ， $O(0, 1)$ ，

设 $M(x, y)$ ，由 $MA = \sqrt{3} MB$ ，可得 $(x+1)^2 + y^2 = 3(x-1)^2 + 3y^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 3$ ，

故 M 的轨迹是以 $C(2, 0)$ 为圆心， $\sqrt{3}$ 为半径的圆，

转化到空间 M 的轨迹为以 C 为球心， $\sqrt{3}$ 为半径的球，同时 M 在球 O 上，

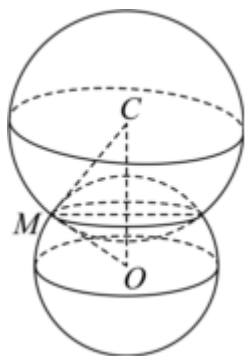
故 M 在两球的交线上，轨迹为圆.

又因为 $OM = \sqrt{2}$ ， $MC = \sqrt{3}$ ，计算可得 $OC = \sqrt{5}$ ，即 $\triangle OCM$ 为直角三角形，

则对应圆的半径为 $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$ ，

M 的轨迹长度即对应圆的周长为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}\pi$.

故选：B.



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (6 分) 已知 p, q 为函数 $f(x) = |qx| - t$ 的两个不相同的零点, 则下列式子一定正确的是 ()

- A. $p^2+q^2<2$
B. $2^p+2^q>8$
C. $\log_3 p \cdot \log_3 q < 0$
D. $pq=1$

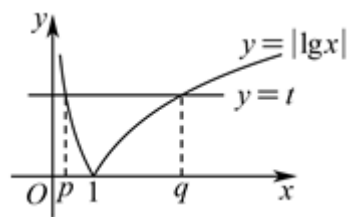
【答案】 CD

【分析】分析可知直线 $y=t$ 与函数 $y=|lgx|$ 的图象有两个交点，数形结合并计算可得出 $pq=1$ ，从而判断 D ；

利用基本不等式可判断 A, B 选项;

由对数的性质可判断 C 选项.

【解答】解：令 $f(x)=0$ 可得 $t=|lgx|$ ，则直线 $y=t$ 与函数 $y=|lgx|$ 的图象有两个交点，且这两个交点的横坐标分别为 p 、 q ，如下图所示：



由图可知, 当 $t > 0$ 时, 直线 $y = t$ 与函数 $y = |lqx|$ 的图象有两个交点,

设 $p < q$, 则 $0 < p < 1 < q$, 由 $f(p) = |lqp| - t = 0$, 可得 $lqp = -t$, 解得 $p = 10^{-t}$,

由 $f(q) = |lqq| - t = 0$, 可得 $lqq = t$, 解得 $q = 10^t$, 所以, $pq = 1$,

对于 A 选项, $p^2+q^2>2pq=2$, A 错;

对于 B 选项, $2^p + 2^q > 2\sqrt{2^{p+q}} = 2^{\frac{p+q}{2}+1} > 2^{\sqrt{pq}+1} = 4$, B 错;

对于 C 选项, $\log_3 p < \log_3 1 = 0 < \log_3 q$, 则 $\log_3 p \cdot \log_3 q < 0$, C 对;

对于 D 选项, 由上可知 $pq=1$, D 对.

故选：CD.

(多选) 10. (6分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$, $a=2$, 则 ()

A. $b \cos A = 2a$

B. $b^2 + c^2 = 8$

C. 角 A 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

D. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

【答案】BCD

【分析】首先将向量的数量积转化为 $b \cos A = 2$, 再根据余弦定理和基本不等式, 三角形的面积公式, 即可求解.

【解答】解: 对于 A, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos A = b \cos A = 2 \neq 2a = 4$, 故 A 错误;

对于 B, 根据余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos A$, 得 $b^2 + c^2 = a^2 + 2b \cos A = 4 + 4 = 8$, 故 B 正确;

对于 C, 由 A 知, $\cos A = \frac{2}{bc} \geq \frac{4}{b^2 + c^2} = \frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $0 < A \leq \frac{\pi}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $S = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\cos A} \times \sin A = \tan A$, $0 < A \leq \frac{\pi}{3}$, 当 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选: BCD.

(多选) 11. (6分) 在平面直角坐标系中, 定义 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 为点 $A(x_1, y_1)$ 到点 $B(x_2, y_2)$ 的“折线距离”. 点 O 是坐标原点, 点 Q 在直线 $2x + y - 2\sqrt{5} = 0$ 上, 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 点 R 在抛物线 $y^2 = -4x$ 上. 下列结论中正确的结论为 ()

A. $d(O, Q)$ 的最小值为 2

B. $d(O, P)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

C. $d(P, Q)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $d(R, Q)$ 的最小值为 $\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

【答案】BCD

【分析】对 A, 根据折线距离的定义, 写出 $d(O, Q)$, 利用绝对值放缩和绝对值不等式, 可判断对错; 对 B, 根据折线距离的定义, 写出 $d(O, P)$, 利用基本(均值)不等式可判断对错; 对 C: 利用圆的参数方程, 结合折线距离的定义, 写出 $d(P, Q)$, 利用绝对值放缩和绝对值不等式, 结合三角函数的最值, 可判断对错; 对 D: 利用抛物线的参数方程, 结合折线距离的定义, 写出 $d(R, Q)$, 利用绝对

值放缩和绝对值不等式, 结合二次函数的值域, 可判断对错.

【解 答】 解 : 对 A : 设 $Q(x, 2\sqrt{5}-2x)$, 则 $d(0, Q) = |x| + 2|\sqrt{5}-x| \geq |x| + |\sqrt{5}-x| \geq |x+\sqrt{5}-x| = \sqrt{5}$ (当且仅当 $x=\sqrt{5}$ 时取 “=”), 故 A 错;

对 B: 设 $P(x, y)$, 则 $x^2+y^2=1$, 则 $d(0, P) = |x| + |y| \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} = \sqrt{2}$, 故 B 对;

对 C: 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(x, 2\sqrt{5}-2x)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } d(P, Q) &= |\cos \theta - x| + |\sin \theta - 2\sqrt{5} + 2x| = |\cos \theta - x| + 2\left|\frac{\sin \theta}{2} - \sqrt{5} + x\right| \\ &\geq |\cos \theta - x| + \left|\frac{\sin \theta}{2} - \sqrt{5} + x\right| \geq \left|\cos \theta - x + \frac{\sin \theta}{2} - \sqrt{5} + x\right| = \sqrt{5} - \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{2}\right) \\ &= \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\cos \theta \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\text{当且仅当 } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 时取 “=”}), \end{aligned}$$

故 C 对;

对 D: 设 $R(-\frac{t^2}{4}, t)$, $Q(x, 2\sqrt{5}-2x)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } d(R, Q) &= \left|-\frac{t^2}{4} - x\right| + |t - 2\sqrt{5} + 2x| = \left|-\frac{t^2}{4} - x\right| + 2\left|\frac{t}{2} - \sqrt{5} + x\right| \\ &\geq \left|-\frac{t^2}{4} - x\right| + \left|\frac{t}{2} - \sqrt{5} + x\right| \geq \left|-\frac{t^2}{4} - x + \frac{t}{2} - \sqrt{5} + x\right| \\ &= \left|-\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \sqrt{5}\right| = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \sqrt{5} \geq \sqrt{5} - \frac{1}{4} \quad (\text{当且仅当 } t=1 \text{ 时取 “=”}), \text{ 故 D 正确.} \end{aligned}$$

故选: BCD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. (5 分) 已知 $(x + \frac{m}{x})^6$ 的二项展开式中, x^4 项的系数是 18, 则 m 的值为 3.

【答案】 3.

【分析】 直接利用二项式的展开式和组合数求出结果.

【解答】 解: $(x + \frac{m}{x})^6$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \cdot (\frac{m}{x})^k = m^k C_6^k x^{6-2k}$, ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$),

令 $6-2k=4$, 得 $k=1$, 所以 x 项的系数为 $m \cdot C_6^1 = 6m = 18$,

所以 $m=3$.

故答案为: 3.

13. (5 分) 若函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内有且仅有两条对称轴, 一个对称

中心, 则实数 ω 的取值范围是 $\{\omega | \frac{15}{4} < \omega \leq \frac{21}{4}\}$.

【答案】 $\{\omega | \frac{15}{4} < \omega \leq \frac{21}{4}\}$.

【分析】 化简 $f(x)$ 解析式, 根据三角函数对称轴和对称中心的知识和定义域列不等式, 由此求得 ω 的取值范围.

【解答】 解: 由题意, 得 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x = \sqrt{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$,

令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} (k \in \mathbb{Z})$,

令 $k=0, 1, 2$, 得 $x = \frac{\pi}{4\omega}, \frac{5\pi}{4\omega}, \frac{9\pi}{4\omega}$;

令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $x = \frac{k\pi - \frac{\pi}{4}}{\omega} (k \in \mathbb{Z})$,

令 $k=1, 2$, 得 $x = \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{7\pi}{4\omega}$.

根据题意, 得 $\begin{cases} \frac{5\pi}{4\omega} < \frac{\pi}{3} \\ \frac{9\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{3} \\ \frac{3\pi}{4\omega} < \frac{\pi}{3} \\ \frac{7\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 解得 $\frac{15}{4} < \omega \leq \frac{21}{4}$.

故答案为: $\{\omega | \frac{15}{4} < \omega \leq \frac{21}{4}\}$.

14. (5 分) 记 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 的数列 $\{x_n\}$ 称为“牛

顿数列”. 若函数 $f(x) = x^2 - x$, 数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列, 设 $a_n = \frac{x_n}{x_n - 1}$, 已知 $a_1 = 2, x_n > 1$, 则 $a_2 =$

4, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若不等式 $t S_n - 14 \leq S_n^2$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则 t 的最大值为 $-\frac{25}{3}$.

【答案】 4, $\frac{25}{3}$.

【分析】 求出函数的导函数, 即可得到 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1}$, 再由 a_1 求出 x_1 , 即可求出 x_2 , 从而求出 a_2 ,

又 $\frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - 1} = (\frac{x_n}{x_n - 1})^2$, 则 $a_{n+1} = 2a_n$, 即可求出 $\{a_n\}$ 的通项公式与 S_n , 参变分离可得 $t \leq S_n + \frac{14}{S_n}$ 对任

意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 利用对勾函数的性质求出 $(S_n + \frac{14}{S_n})_{\min}$, 即可得解.

【解答】解: 因为 $f(x) = x^2 - x$, 则 $f'(x) = 2x - 1$, 则 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1}$,

由 $a_1 = 2$, $a_1 = 1 \ln \frac{x_1}{x_1 - 1}$, 所以 $\frac{x_1}{x_1 - 1} = e^2$, 解得 $x_1 = \frac{e^2}{e^2 - 1}$, 所以 $x_2 = \frac{x_1^2}{2x_1 - 1} = \frac{e^4}{e^4 - 1}$,

所以 $a_2 = 1 \ln \frac{x_2}{x_2 - 1} = 4$,

由 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1}$, 所以 $\frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - 1} = \frac{\frac{x_n^2}{2x_n - 1}}{\frac{x_n^2}{2x_n - 1} - 1} = \frac{x_n^2}{x_n^2 - 2x_n + 1} = (\frac{x_n}{x_n - 1})^2$,

所以 $a_{n+1} = 1 \ln \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - 1} = 1 \ln (\frac{x_n}{x_n - 1})^2 = 2 \ln \frac{x_n}{x_n - 1} = 2a_n$, 即数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项、2 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 2^n$, $S_n = \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^{n+1} - 2$,

因为 $t S_n - 14 \leq S_n^2$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 又 $S_n > 0$ 且 S_n 单调递增,

所以 $t \leq S_n + \frac{14}{S_n}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

令 $g(x) = x + \frac{14}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

根据对勾函数的性质可得 $g(x) = x + \frac{14}{x}$ 在 $(0, \sqrt{14})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{14}, +\infty)$ 上单调递增,

又 $2 = S_1 < \sqrt{14} < S_2 = 6$, 且 $g(2) = 9$, $g(6) = \frac{25}{3} < g(2)$,

所以 $t \leq S_2 + \frac{14}{S_2} = \frac{25}{3}$, 所以 t 的最大值为 $\frac{25}{3}$.

故答案为: $4; \frac{25}{3}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}, +\infty)$ 上单调递增;

(2) $[1, +\infty)$.

【分析】 (1) 先求导, 再利用导数的正负讨论函数的单调性即可;

(2) 由 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 等价于 $a \geq \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 构造函数 $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} (x > 0)$, 利用函数最值法即可求解.

【解答】 解: (1) 因为 $f(x) = ax^2 - \ln x - x, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{所以 } f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} - 1 = \frac{2ax^2 - x - 1}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $2ax^2 - x - 1 < 0$ 恒成立, 所以 $f'(x) < 0$;

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $2ax^2 - x - 1 = 0$,

$$\text{解得 } x = \frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a} \text{ (舍去负根),}$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } x > \frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}; \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < \frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a},$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}, +\infty)$ 上单调递增,

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(0, \frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a})$, 增区间为 $(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}, +\infty)$.

(2) 由 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 得 $ax^2 \geq \ln x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $a \geq \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$$\text{令 } g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{-x + 1 - 2 \ln x}{x^3},$$

$$\text{令 } h(x) = -2 \ln x - x + 1 (x > 0),$$

易知 $h(x) = -2 \ln x - x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且 $h(1) = 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) > 0$,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

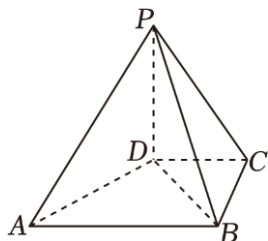
所以 $g(x)_{\max} = g(1) = 1$,

所以 $a \geq 1$ ，即 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 。

16. (15 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为梯形，其中 $AB \parallel CD$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $AB = 2BC = 2CD = 4$ ，平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(1) 证明： $AD \perp PD$ ；

(2) 若 $AB \perp PD$ ，且 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 2，求平面 PBC 与平面 PAD 所成二面角的余弦值。



【答案】(1) 证明见解析；(2) $\frac{2\sqrt{57}}{19}$ 。

【分析】(1) 由余弦定理求出 $AD^2 = 12$ ，由勾股定理逆定理得到 $AD \perp BD$ ，由面面垂直得到线面垂直，得到 $AD \perp PD$ ；

(2) 求出 $\angle PCD$ 就是 PC 与平面 $ABCD$ 所成角，得到 $PD = 4$ ，建立空间直角坐标系，求出平面 PBC 的法向量，利用法向量求解二面角的余弦值。

【解答】解：(1) 证明：因为 $\angle BCD = 60^\circ$ ， $BC = CD = 2$ ，

所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形，

所以 $AB = 2BD = 4$ ，

又四边形 $ABCD$ 为梯形， $AB \parallel DC$ ，则 $\angle ABD = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理可知， $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 12$ ，

故 $AD^2 + BD^2 = AB^2$ ，由勾股定理逆定理得 $AD \perp BD$ ，

因为平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PBD \cap$ 平面 $ABCD = BD$ ， $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $AD \perp$ 平面 PBD ，

又因为 $PD \subset$ 平面 PBD ，

所以 $AD \perp PD$ 。

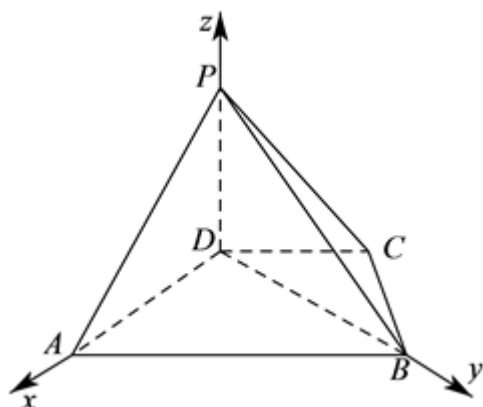
(2) 由 (1) 可知 $AD \perp PD$ ，又因为 $AB \perp PD$ ， $AD \cap AB = A$ ，

所以 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $\angle PCD$ 就是 PC 与平面 $ABCD$ 所成角，

所以 $\tan \angle PCD = \frac{DP}{DC} = 2$, 所以 $PD = 4$,

以 D 点为坐标原点, DA , DC , DP 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $B(0, 2, 0)$, $C(-\sqrt{3}, 1, 0)$, $P(0, 0, 4)$,

所以 $\overrightarrow{BP} = (0, -2, 4)$, $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x, y, z)$,

$$\text{则有} \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{BP} = (x, y, z) \cdot (0, -2, 4) = -2y + 4z = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{BC} = (x, y, z) \cdot (-\sqrt{3}, -1, 0) = -\sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$$

令 $z = 3$, 则 $y = 6$, $x = -2\sqrt{3}$, 取 $\overrightarrow{n_1} = (-2\sqrt{3}, 6, 3)$,

由题意得 $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, 0)$ 为平面 PAD 的法向量,

$$\text{所以} \cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{6}{\sqrt{57}} = \frac{2\sqrt{57}}{19},$$

由图形可知, 平面 PBC 与平面 PAD 所成二面角为锐角,

故平面 PBC 与平面 PAD 所成二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

17. (15 分) 2023 年 6 月 7 日, 21 世纪汽车博览会在上海举行, 已知某汽车模型公司共有 25 个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件 A 为小明取到红色外观的模型, 事件 B 为小明取到棕色内饰的模型, 求 $P(B)$ 和 $P(B|A)$, 并判断事件 A 和事件 B 是否独立;

(2) 该公司举行了一个抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型,

给出以下假设：

假设 1：拿到的两个模型会出现三种结果，即外观和内饰均为同色、外观和内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色；

假设 2：按结果的可能性大小，概率越小奖项越高；

假设 3：该抽奖活动的奖金额为：一等奖 600 元，二等奖 300 元、三等奖 150 元；

请你分析奖项对应的结果，设 X 为奖金额，写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望。

【答案】(1) $P(B) = \frac{4}{5}$, $P(B|A) = \frac{6}{7}$, 事件 A 和事件 B 不独立；

(2) X 的分布列为：

X	150	300	600
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{49}{150}$	$\frac{13}{75}$

$$E(X) = 277.$$

【分析】(1) 根据古典概型概率公式和事件的独立性定义即可得出；

(2) 分别求出三种结果对应的概率，比较大小，确定 X 对应的概率，求出分布列，利用期望公式进行计算即可。

【解答】解：(1) 若红色外观的模型，则分棕色内饰 12 个，米色内饰 2 个，

$$\text{则对应的概率 } P(A) = \frac{12+2}{25} = \frac{14}{25},$$

若小明取到棕色内饰，分红色外观 12 个，蓝色外观 8 个，

$$\text{则对应的概率 } P(B) = \frac{12+8}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5},$$

$$\text{取到红色外观的模型同时是棕色内饰的有 12 个，即 } P(AB) = \frac{12}{25},$$

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{14}{25}} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7},$$

$$\because P(A)P(B) = \frac{14}{25} \times \frac{4}{5} = \frac{56}{125} \neq \frac{12}{25}, \therefore P(A)P(B) \neq P(AB),$$

即事件 A 和事件 B 不独立；

(2) 由题意知 $X=600, 300, 150$,

$$\text{则外观和内饰均为同色的概率 } P = \frac{C_{12}^2 + C_8^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{25}^2} = \frac{66+28+3+1}{300} = \frac{98}{300} = \frac{49}{150},$$

$$\text{外观和内饰都异色的概率 } P = \frac{C_{12}^1 C_3^1 + C_2^1 C_8^1}{C_{25}^2} = \frac{52}{300},$$

$$\text{仅外观或仅内饰同色的概率 } P = 1 - \frac{49}{150} - \frac{52}{300} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} > \frac{49}{150} > \frac{13}{75},$$

$$\therefore P(X=150) = \frac{1}{2}, \quad P(X=300) = \frac{98}{300} = \frac{49}{150}, \quad P(X=600) = \frac{13}{75},$$

则 X 的分布列为：

X	150	300	600
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{49}{150}$	$\frac{13}{75}$

$$\text{则 } E(X) = 150 \times \frac{1}{2} + 300 \times \frac{49}{150} + 600 \times \frac{13}{75} = 277.$$

18. (17 分) 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等差数列, $a_3 = b_2$ 且 $a_4 = b_1 + b_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 将 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中的所有项按从小到大的顺序排列组成新数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 50 项和 S_{50} ;

(3) 设数列 $\{d_n\}$ 的通项公式为 $d_n = \begin{cases} a_{n+1}, & n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}} + 2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$, 记 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若

$$3T_{2n-1} \geq 2^{2n+1} + 3nt - 14 \text{ 对任意的 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 都成立, 求正数 } t \text{ 的取值范围.}$$

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}, b_n = 2n$;

(2) 2451;

(3) $(0, 4]$.

【分析】 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), $\{b_n\}$ 的公差为 d , 根据已知条件求出 q, d 可得答案;

(2) 根据 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式可得数列 $\{c_n\}$ 是首项为 1, 从第二项 2 起, 以 2 为公差的等差数列, 由等差数列求和公式可得答案;

(3) 求出数列 $\{d_n\}$ 的通项公式, 分组求和可得 T_{2n-1} , 可转化为 $t \leq n + \frac{2}{n} + 1$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 求出 $n + \frac{2}{n} + 1$ 的最小值可得答案.

【解答】 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $a_1 = 1, b_1 = 2, a_3 = b_2$ 且 $a_4 = b_1 + b_3$, 所以 $q^2 = 2 + d, q^3 = 4 + 2d$,

解得 $q = 2, d = 2$,

所以 $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = 2n$;

$$(2) a_n = 2^{n-1}, b_n = 2n,$$

因为数列 $\{b_n\}$ 是正偶数构成的等差数列, 数列 $\{a_n\}$ 除首项外, 其余项都是 2 的倍数,

所以数列 $\{c_n\}$ 是首项为 1, 从第二项 2 起, 以 2 为公差的等差数列,

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 50 项和为 $1 + 49 \times 2 + \frac{1}{2} \times 49 \times 48 \times 2 = 2451$;

$$(3) \text{ 因为 } d_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ 为奇数} \\ n+2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*,$$

所以 $T_{2n-1} = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_{2n-1}$

$$= (2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n-1}) + (4 + 6 + 8 + \dots + 2n)$$

$$= \frac{2(1-4^n)}{1-4} + \frac{4+2n}{2}(n-1)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{2 \times 4^n}{3} + n^2 + n,$$

$$\text{由 } 3T_{2n-1} \geq 2^{2n+1} + 3nt - 14 \text{ 得 } 3\left(\frac{8}{3} + \frac{2 \times 4^n}{3} + n^2 + n\right) \geq 2^{2n+1} + 3nt - 14,$$

$$\text{即 } t \leq n + \frac{2}{n} + 1 \text{ 对任意的 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 都成立,}$$

$$\text{因为 } n + \frac{2}{n} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 等号取不到,}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 1+2+1=4, \text{ 当 } n=2 \text{ 时, } 2+1+1=4,$$

所以正数 t 的取值范围是 $(0, 4]$.

19. (17 分) (理) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若在曲线 C_1 的方程 $F(x, y) = 0$ 中, 以 $(\lambda x, \lambda y)$ (λ 为正实数) 代替 (x, y) 得到曲线 C_2 的方程 $F(\lambda x, \lambda y) = 0$, 则称曲线 C_1, C_2 关于原点“伸缩”, 变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$ 称为“伸缩变换”, λ 称为伸缩比.

(1) 已知曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, 伸缩比 $\lambda = 2$, 求 C_1 关于原点“伸缩变换”后所得曲线 C_2 的方程;

(2) 射线 l 的方程 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x (x \geq 0)$, 如果椭圆 $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 经“伸缩变换”后得到椭圆 C_2 , 若射线 l 与椭圆 C_1, C_2 分别交于两点 A, B , 且 $|AB| = \sqrt{2}$, 求椭圆 C_2 的方程;

(3) 对抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x$, 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_1x, \lambda_1y)$, 得抛物线 $C_2: y^2 = 2p_2x$; 对 C_2 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_2x, \lambda_2y)$ 得抛物线 $C_3: y^2 = 2p_3x$, 如此进行下去, 对抛物线 $C_n: y^2 = 2p_nx$ 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_nx,$

$\lambda_n y$), 得抛物线 $C_{n+1}: y^2 = 2p_{n+1}x$, ... 若 $p_1 = 1$, $\lambda_n = (\frac{1}{2})^n$, 求数列 $\{p_n\}$ 的通项公式 p_n .

【答案】见试题解答内容

【分析】(1) 由“伸缩变换”的伸缩比得 $\frac{(2x)^2}{9} - \frac{(2y)^2}{4} = 1$, 从而即得曲线 C_2 的方程;

(2) 根据 C_2, C_1 关于原点“伸缩变换”, 对 C_1 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y) (\lambda > 0)$, 得到 $C_2: \frac{\lambda^2 x^2}{16} + \frac{\lambda^2 y^2}{4} = 1$

分别解方程组得点 A, B 两点的坐标, 最后利用两点的距离公式得到关于 λ 的方程求出 λ 的值, 即可写出椭圆 C_2 的方程;

(3) 先对 $C_n: y^2 = 2p_n x$ 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_n x, \lambda_n y)$ 得抛物线 $C_{n+1}: (\lambda_n y)^2 = 2p_n \lambda_n x$, 结合 $y^2 = 2p_{n+1} x$ 得到: $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\lambda_n} = 2^n$, 从而求得数列 $\{p_n\}$ 的通项公式 p_n .

【解答】解 (1) 由条件得 $\frac{(2x)^2}{9} - \frac{(2y)^2}{4} = 1$, 得 $C_2: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$; (4 分)

(2) $\because C_2, C_1$ 关于原点“伸缩变换”, 对 C_1 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y) (\lambda > 0)$, 得到 $C_2: \frac{\lambda^2 x^2}{16} + \frac{\lambda^2 y^2}{4} = 1$,

(5 分)

解方程组 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}x & (x \geq 0) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 得点 A 的坐标为 $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$; (7 分)

解方程组 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}x & (x \geq 0) \\ \frac{\lambda^2 x^2}{16} + \frac{\lambda^2 y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 得点 B 的坐标为 $(\frac{4\sqrt{3}}{3\lambda}, \frac{2\sqrt{6}}{3\lambda})$; (8 分)

$|AB| = \sqrt{(\frac{4\sqrt{3}}{3\lambda} - \frac{4\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{6}}{3\lambda} - \frac{2\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}|\lambda - 1|}{|\lambda|} = \sqrt{2}$, 化简后得 $3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, 解得

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{2}{3}$, 因此椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 或 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. (12 分) (漏写一个方程扣 2 分)

(3) (理) 对 $C_n: y^2 = 2p_n x$ 作变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_n x, \lambda_n y)$ 得抛物线 $C_{n+1}: (\lambda_n y)^2 = 2p_n \lambda_n x$, 得 $y^2 = \frac{2p_n}{\lambda_n} x$,

$$\text{又} \because y^2 = 2p_{n+1}x, \therefore p_{n+1} = \frac{p_n}{\lambda_n}, \text{ 即 } \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\lambda_n} = 2^n, \text{ (14 分)}$$

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_4}{p_3} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^{n-1}, \text{ 则 } \frac{p_n}{p_1} = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}, \text{ (16 分)}$$

$$\text{(或解: } p_{n+1} = 2^n p_n, \quad p_n = 2^{n-1} p_{n-1} = \cdots = 2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} p_1 = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} p_1, \text{) } p_1 = 1,$$

$$\therefore p_n = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}. \text{ (18 分)}$$