2022-2023学年春学期一模

初三数学

一、选择题（本大题10小题，每小题3分．在每小题列出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的答案填在答题卡相应的位置上．）

1. $\sqrt{9}$ =（　　）

A. ±3　　B. 3　　C. ﹣3　　D. $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据算术平方根直接计算即可求解．

【详解】解：$\sqrt{9}$ =3

故选B

【点睛】本题考查了求一数的算术平方根，正确的计算是解题的关键．

2. 函数 y= $\frac{x}{2-x}$ 中自变量 x 的取值范围是（　　）

A. x≠2　　B. x≥2　　C. x≤2　　D. x＞2

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件求出自变量的取值范围．

【详解】解：根据题意得：2﹣x≠0，

解得：x≠2．

故函数 y= $\frac{x}{2-x}$ 中自变量 x 的取值范围是 x≠2．

故选：A．

【点睛】本题考查函数自变量的取值范围，解题的关键是利用分式有意义的条件去求解．

3. 下列运算正确的是（　　）

A. $3a+3b=6ab$　　B. $a^3-a=a^2$　　C. （a^2）^{3}=a^6　　D. $a^6\div a^3=a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据合并同类项法则、幂的乘方、同底数幂除法法则逐项进行计算即可得．

【详解】解：A、$3a$ 与 $3b$ 不是同类项，不能合并，不符合题意；

B、a^3 与 a 不是同类项，不能合并，不符合题意；

C、（a^2）^{3}=a^6，符合题意；

D、$a^6÷a^3=a^3$，不符合题意，

故选 C．

【点睛】本题考查了合并同类项、幂的乘方、同底数幂除法等运算，熟练掌握各运算的运算法则是关键.

4. 下列命题中，假命题是(　　)

A. 一组对边相等的四边形是平行四边形

B. 三个角是直角的四边形是矩形

C. 四边相等的四边形是菱形

D. 有一个角是直角的菱形是正方形

【答案】A

【解析】

【分析】根据矩形、正方形、平行四边形、菱形的判定即可求出答案.

【详解】A:一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，是假命题；

B:三个角是直角的四边形是矩形，是真命题；

C:四边相等的四边形是菱形，是真命题；

D:有一个角是直角的菱形是正方形，是真命题；

故选 A．

【点睛】考查菱形、矩形和平行四边形的判定与命题的真假区别，关键是根据矩形、正方形、平行四边形、菱形的判定解答.

5. 某班测量了 10 名学生的身高，他们的身高与对应的人数如下表所示

身高（cm）	163	165	170	172	173
学生人数（人）	1	2	3	2	2

则这 10 名学生身高的众数和中位数分别为（　　）

A. 165cm，165cm　　B. 170cm，165cm

C. 165cm，170cm　　D. 170cm，170cm

【答案】D

【解析】

【分析】根据众数、中位数的定义进行判断即可.

【详解】这 10 名学生身高的众数和中位数分别为 170cm，170cm

故答案为：D.

【点睛】本题考查了众数、中位数的问题，掌握众数、中位数的定义是解题的关键.

6. 关于 x 的方程 $x^2-kx+9=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值为（　　）

A. 9　　B. 6　　C. ±9　　D. ±6

【答案】D

【解析】

【分析】利用一元二次方程的根的判别式即可得求解.

【详解】解：　关于 x 的方程 $x^2-kx+9=0$ 有两个相等的实数根，

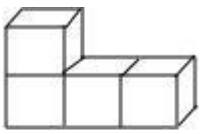
$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-k)^2-4\times 9=0$

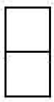
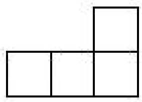
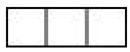
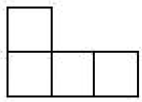
解得：　$k=$

± 6．故选 D.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根的判别式，解题的关键是掌握：对于一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $\Delta=b^2-4ac>0$，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=b^2-4ac=0$，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta=b^2-4ac<0$，方程没有实数根.

7. 如图，是由 4 个大小相同的正方体组合而成的几何体，其主视图是（　　）



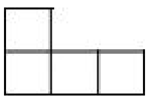
A. 　　B. 　　C. 　　D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据几何体的三视图，即可解答.

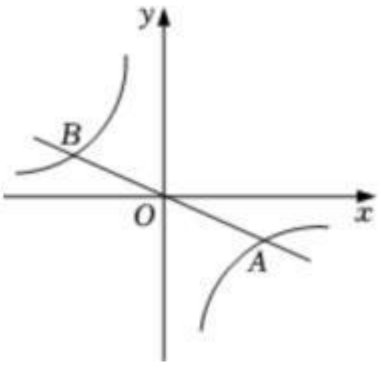
【详解】解：根据图形可得主视图为：



故选：D.

【点睛】本题考查了几何体的三视图，掌握画物体的三视图的的方法是解题的关键，画物体的三视图的口诀为：主、俯：长对正；主、左：高平齐；俯、左：宽相等.

8. 如图，正比例函数 $y=k_1x$ 与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(1,m)$、B 两点，当 $k_1x\leq\frac{k_2}{x}$ 时，x 的取值范围是（　　）



A. $-1\le x<0$或$x\ge1$　　B. $x\le-1$或$0<x\le1$

C. $x\le-1$或$x\ge1$　　D. $-1\le x<0$或$0<x\le1$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据反比例函数图像的对称点求出点 B 的坐标，然后根据 $k_1x\le\frac{k_2}{x}$ 的解集即为反比例函数在一次函数上方的部分可得答案.

【详解】解析： 正比例函数 $y=k_1x$ 与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(1,m)$ 、B 两点，

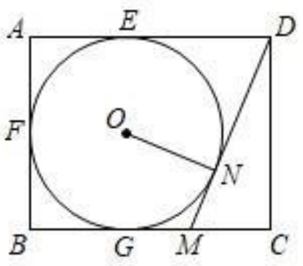
$\therefore B(-1,-m)$，

由图像可知，当 $k_1x\le\frac{k_2}{x}$ 时，x 的取值范围是$-1\le x<0$或$x\ge1$，

故选：A.

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，根据反比例函数的对称性得出点 B 的坐标的坐标是解本题的关键.

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=5$，AD，AB，BC 分别与⊙O 相切于 E，F，G 三点，过点 D 作⊙O 的切线交 BC 于点 M，切点为 N，则 DM 的长为（　　）

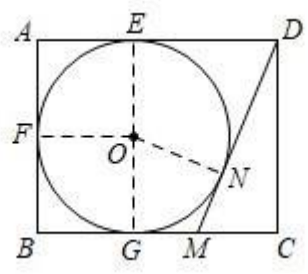


A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{4\sqrt{13}}{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

【详解】解：连接 OE，OF，ON，OG，



在矩形 $ABCD$ 中，

∵$\angle A=\angle B=90°$，$CD=AB=4$，

∵AD，AB，BC 分别与⊙O 相切于 E，F，G 三点，

∴$\angle AEO=\angle AFO=\angle OFB=\angle BGO=90°$，

∴四边形 $AFOE$，$FBGO$ 是正方形，

∴$AF=BF=AE=BG=2$，

∴$DE=3$，

∵DM 是⊙O 的切线，

∴$DN=DE=3$，$MN=MG$，

∴$CM=5-2-MN=3-MN$，

在 $R_t\triangle DMC$ 中，$DM^2=CD^2+CM^2$，

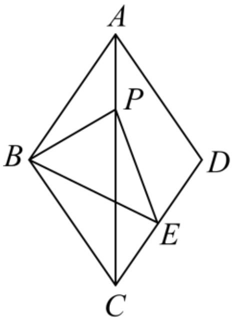
∴（$3+NM$）^{2}=（$3-NM$）$^2+4^2$，

∴$NM=\frac{4}{3}$，

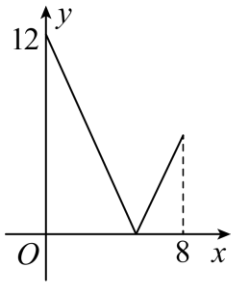
∴$DM=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$，

故选 A．

10. 如图（1），点 P 为菱形 $ABCD$ 对角线 AC 上一动点，点 E 为边 CD 上一定点，连接 PB，PE， BE．图（2）是点 P 从点 A 匀速运动到点 C 时，$\triangle PBE$ 的面积 y 随 AP 的长度 x 变化的关系图象（当点 P 在 BE 上时，令 $y=0$），则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）



图(1)



图(2)

A. $8\sqrt{3}$　　　　B. $8\sqrt{5}$　　　　C. 20　　　　D. 24

【答案】C

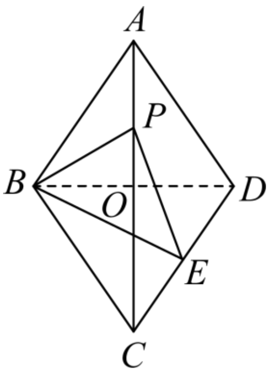
【解析】

【分析】根据图象可知，当 $x=0$ 时，即点 P 与点A 重合，此时 $S_{\triangle ABE}=12$，进而求出菱形的面积，当 $x=8$ 时，此时点 P 与点C 重合，即 $AC=8$，连接 BD，利用菱形的性质，求出边长，即可得出结果.

【详解】解：由图象可知：当 $x=0$时，即点 P 与点A 重合，此时 $S_{\triangle ABE}=12$，

$\therefore S_{菱形ABCD}=2S_{ABE}=24$，

当$x=8$时，此时点 P 与点C 重合，即 $AC=8$，连接 BD，交 AC 于点O，



则： $BD\perp AC,OA=OC=4,OB=OD$，

$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=24$，

$\therefore BD=6$，

$\therefore OB=OD=3$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$，

$\therefore$菱形 $ABCD$ 的周长为 $4\times5=20$；

故选 C.

【点睛】本题考查菱形的性质和动点的函数图象．熟练掌握菱形的性质，从函数图象中有效的获取信息，是解题的关键.

二、填空题（本大题 8 小题，每小题 3 分．请把下列各题的正确答案填写在答题卡相应的位置上．）

11. 因式分解：$2x^3-8x=$______．

【答案】$2x\left(x+2\right)\left(x-2\right)$##$2x\left(x-2\right)\left(x+2\right)$

【解析】

【分析】先提公因式，再利用平方差公式继续分解即可解答．

【详解】解：$2x^3-8x$

$=2x(x^2-4)$

$=2x(x+2)(x-2)$

故答案为：$2x\left(x+2\right)\left(x-2\right)$

【点睛】本题考查了提公因式法与公式法的综合运用，一定要注意如果多项式的各项含有公因式，必须先提公因式．

12. 2022 年中国粮食产量再获丰收，突破13731亿斤，其中13731亿用科学记数法表示为___________．

【答案】1.3731×10^{12}

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a\times10^n$，其中$1\le|a|<10$，n 为整数．

【详解】解：13731亿$=1.3731\times10^4\times10^8=1.3731\times10^{12}$．故答案为：$1.3731\times10^{12}$．

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中$1\le|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值≥10 时，n 是正数；当原数的绝对值<1 时，n 是负数，确定a 与 n 的值是解题的关键．

13. 若 x，y 满足方程组$\begin{cases}2x-3y=1\\x-4y=-2\end{cases}$，则 $x+y=$___________．

【答案】3

【解析】

【分析】方程组利用加减消元法求出解得到 x 与 y 的值，代入原式计算即可求出值．

【详解】$\begin{cases}2x-3y=1①\\x-4y=-2②\end{cases}$，

①$-$②$\times2$ 得：$5y=5$，

解得：$y=1$，

把 $y=1$代入②得： $x=2$，

则 $x+y=2+1=3$，

故答案为:3

【点睛】此题考查了解二元一次方程组，熟练掌握加减消元的方法是解本题的关键.

14. 已知 $a+b=3$，$ab=-4$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=$ ___.

【答案】 $-\frac{17}{4}$

【解析】

【分析】根据完全平方公式以及分式的除法运算即可求出答案.

【详解】∵ $a+b=3$，

∴ $(a+b)^2=9$，

∴ $a^2+2ab+b^2=9$，

∵$ab=-4$，

∴ $\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}=-\frac{9}{4}$，

∴ $\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}=-\frac{9}{4}$，

∴ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-\frac{17}{4}$，

故答案为： $-\frac{17}{4}$.

【点睛】本题考查分式的化简求值，解题的关键是熟练运用分式的除法以及完全平方公式.

15. 用一个圆心角为 120°，半径为 6 的扇形作一个圆锥的侧面，这个圆锥的底面圆的半径是__.

【答案】2

【解析】

【详解】解： 扇形的弧长= $\frac{120\pi\times6}{180}$=2πr，

∴圆锥的底面半径为

r=2．故答案为 2.

16. 一个正多边形的内角和为1080°，则这个正多边形的每个外角的度数为__________.

【答案】 45°

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式（$n-2$）•180°列式进行计算求得边数，然后根据多边形的外角和即可得到结论．

【详解】解：设它是 n 边形，则

（$n-2$）•180°＝1080°，

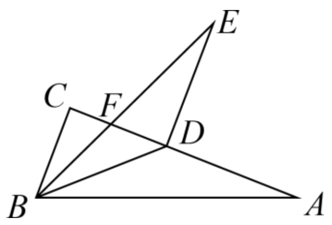
解得 n＝8． 360° ÷8

＝45°，

故答案为 45°．

【点睛】本题考查了多边形的内角和公式，熟记公式是解题的关键．

17. 如图，在Rt△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$， $BC=4$， $AC=10$， D 为 AC 边上一点，沿 BD 将三角形进行折叠，使点 A 落在点 E 处，记 BE 与 AC 边的交点为 F，若 $DE\perp AC$，则CF 的长为___________.



【答案】 2

【解析】

【分析】由 $DE\perp AC$，$\angle C=90^{\circ}$ 和折叠的性质，易知$\angle CBF=\angle A$，根据正切函数可求解.

【详解】解：∵ $DE\perp AC$

∴ $\angle EDF=\angle C=90^{\circ}$，

∵ $\angle EFD=\angle CFB$，

∴ $\angle CBF=\angle E$.

由折叠的性质可知， $\angle E=\angle A$，

∴ $\angle CBF=\angle A$，

∴ $\tan\angle CBF=\dfrac{CF}{BC}=\tan\angle A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$,

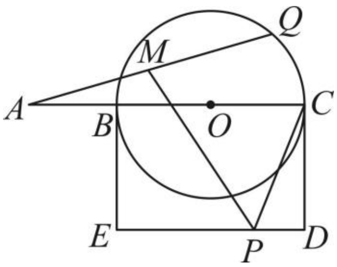
∴ $CF=BC\times\dfrac{2}{5}=5\times\dfrac{2}{5}=2$.

故答案为： 2 .

【点睛】本题考查了折叠的性质，解直角三角形，解题的关键是熟练运用三角函数解直角三角形.

18. 如图，在矩形 $BCDE$ 中，$BC=12$，$CD=8$，以 BC 为直径作 $\odot O$，延长CB 到点A，

使 $BA=6$，点 Q 是 $\odot O$ 上的动点，线段 AQ 的中点为 M，点 P 为 DE 上一动点．



（1）直线 ED 与 $\odot O$ 的位置关系为__________；

（2）$PC+PM$ 的最小值为__________．

【答案】　①. 相离　②. 17

【解析】

【分析】（1）根据矩形的性质得出点 O 到 ED 距离为 $CD=8$，根据圆心到直线大于半径即可得出结论；

（2）根据题意得出 M 在以 B 为圆心，3 为半径的圆上运动，根据轴对称的性质连接 $C'B$，交 ED 于点 P，则此时 $PC+PM$ 取得最小值，勾股定理即可求解．

【详解】解：（1）∵在矩形 $BCDE$ 中，$BC=12$，$CD=8$，

$\therefore OB=OC=6$，点 O 到 ED 距离为 $CD=8$，

$\because 6<8$，

∴直线 ED 与 $\odot O$ 的位置关系为相离，

故答案为：相离．

（2）如图所示，连接 OQ，

$\because OB=6$，$BA=6$，

∴ B 为 AO 的中点，

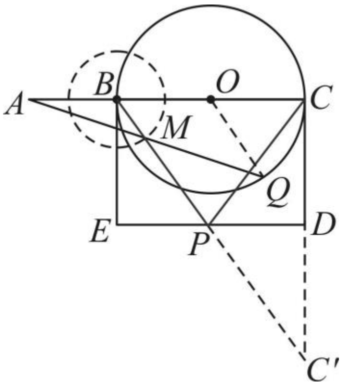
∵线段 AQ 的中点为 M，

$\therefore BM=\frac{1}{2}QO=3$，

即 M 在以 B 为圆心，3 为半径的圆上运动，

作点 C 关于 DE 的对称轴点 C'，则 $PC=PC'$

连接 $C'B$，交 ED 于点 P，则此时 $PC+PM$ 取得最小值，



$\because CC'=2CD=16, BC=12$，

$\therefore BC'=\sqrt{BC^2+CC'^2}=20$，

$\therefore PC+PM=PC'+PM=BC-MN=20-3=17$，

故答案为：17．

【点睛】本题考查了矩形的性质，勾股定理，中位线的性质，轴对称的性质，直线与圆的位置关系，熟练掌握以上知识是解题的关键．

三、解答题（本大题 10 小题，共 96 分．请把下列各题的正确答案填写在答题卡相应的位置上．）

19. 计算：

（1）$\left(-\sqrt{5}\right)^2+\cos 60°-\left(\pi+\sqrt{2}\right)^0$；

（2）$(x-2)^2-x(x-3)$．

【答案】（1）$\frac{9}{2}$

（2）$4-x$

【解析】

【分析】（1）根据特殊角的三角函数值，零指数幂，实数的混合运算进行计算即可求解；

（2）根据完全平方公式，单项式乘以多项式进行计算即可求解．

【小问 1 详解】

解：$\left(-\sqrt{5}\right)^2+\cos 60°-\left(\pi+\sqrt{2}\right)^0$

$=5+\frac{1}{2}-1$

$=\frac{9}{2}$；

【小问 2 详解】

解：$(x-2)^2-x(x-3)$

$=x^2-4x+4-x^2+3x$

$=4-x$.

【点睛】本题考查了整式的乘法运算，实数的混合运算，熟练掌握乘法公式以及特殊角的三角函数值，零指数幂，实数的运算法则是解题的关键.

20. (1) 解方程：$x^2+4x-2=0$；

(2) 解不等式组 $\begin{cases}2x-1>x\\ x-3\le\frac{1}{2}x-1\end{cases}$.

【答案】(1) $x_1=\sqrt{6}-2$，$x_2=-\sqrt{6}-2$;(2) $1<x\le4$

【解析】

【分析】（1）利用配方法解方程，在本题中，把常数项-2移项后，应该在左右两边同时加上一次项系数 4 的一半的平方.

（2）解不等式组，就是分别解两个不等式后，再根据大小小大取中，求出公共部分.

【详解】解：(1)$x^2+4x-2=0$，

$x^2+4x=2$，

$x^2+4x+4=6$，

$(x+2)^2=6$，

∴$x+2=\pm\sqrt{6}$，

$x_1=\sqrt{6}-2$，$x_2=-\sqrt{6}-2$；

(2) $\begin{cases}2x-1>x\ldots\ldots①\\ x-3\le\frac{1}{2}x-1\ldots\ldots②\end{cases}$

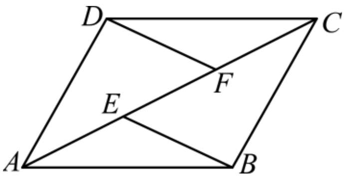
由①得：$x>1$，

由②得：$x\le4$，

∴不等式组的解为：$1<x\le4$.

【点睛】考查了配方法解一元二次方程和解一元一次不等式组，解题时要注意解题步骤的准确应用，配方法的一般步骤：①把常数项移到等号的右边；②把二次项的系数化为 1；③等式两边同时加上一次项系数一半的平方；解不等式组，求其解集时根据：大大取大，小小取小，大小小大取中，大大小小取不着，准确写出解集.

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别是对角线 AC 上任意两点，且满足 $AF=CE$，连接 DF，BE，若 $DF=BE$，$DF\parallel BE$．求证：



（1）$\triangle AFD \cong \triangle CEB$；

（2）四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【答案】（1）见详解　　（2）见详解

【解析】

【分析】（1）先由 $DF \parallel BE$ 得到角相等，然后利用全等三角形的判定方法即可证得；

（2） 由（1）得 $AD = BC$，证得 $AD \parallel BC$，即可证得；

【小问 1 详解】

解：　$DF \parallel BE$，

$\therefore \angle AFD = \angle CEB$，

在$\triangle AFD$与　CEB中，

$$\begin{cases} DF = BE \\ \angle AFD = \angle CEB \\ AF = CE \end{cases},$$

$\therefore \triangle AFD \cong \triangle CEB$.

【小问 2 详解】

解：　$\triangle AFD \cong \triangle CEB$，

$\therefore \angle DAF = \angle BCE$，　$AD = BC$，

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定、平行四边形的判定等知识点，熟练运用判定方法是解题关键.

22. 4 月 23 日是“世界读书日”，设立的目的是为了推动更多的人去阅读和写作，希望所有人都能尊重和感谢为人类文明做出过巨大贡献的文学、文化、科学、思想大师们，保护知识产权．每年的这一天，世界上许多国家会举办各种各样的庆祝和图书宣传活动．在 2022 年第 27 个“世界读书日”来临之际，某校为了解学生的阅读情况，从全校随机抽取了部分学生，调查了他们平均每周课外阅读的时间t（ 单位：小时），把调查结果分为四档：A 档：$t < 6$；B 档： $6 \le t < 7$；C 档： $7 \le t < 8$；D 档：$t \ge 8$．根据调查结果绘成如下两幅不完整的统计图．请根据统计图中的信息解答下列问题：

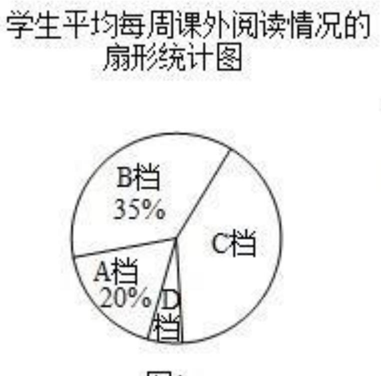


图1

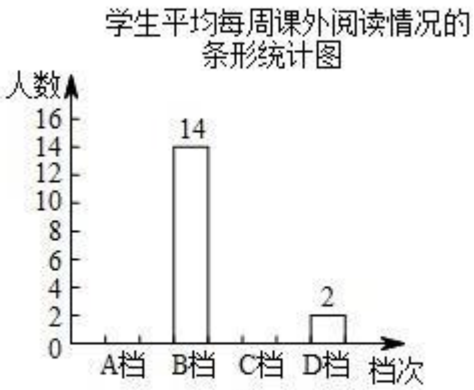


图2

（1）本次抽样调查的样本容量是________；

（2）图 1 中 A 档所在扇形的圆心角的度数是 ________°；

（3）请补全图 2 条形统计图；

（4）已知全校共有 800 名学生，请你估计每周课外阅读时间为$6 \le t < 8$的学生人数是多少？

【答案】（1）40　　（2）72

（3）见解析　　（4）600

【解析】

【分析】（1）根据 B 档的人数与占比即可求得样本的容量；

（2）根据A 档的百分比乘以 360°即可求得 A 档所在扇形的圆心角的度数是；

（3）根据A 档的百分比乘以样本的容量即可求得A 档的人数，用总人数减去 A, B, D 档的人数即可求得C 档的人数，进而补全统计图；

（4）根据 B, C 档的人数所占的比例乘以 800 即可求解.

【小问 1 详解】

解：样本的容量为$14 \div 35\% = 40$，

故答案为：40；

【小问 2 详解】

解：$20\% \times 360° = 72°$，

故答案为：72；

【小问 3 详解】

A 档的人数为：$20\% \times 40 = 8$，

C 档的人数为 $40 - 8 - 14 - 2 = 16$，

补全统计图如图，

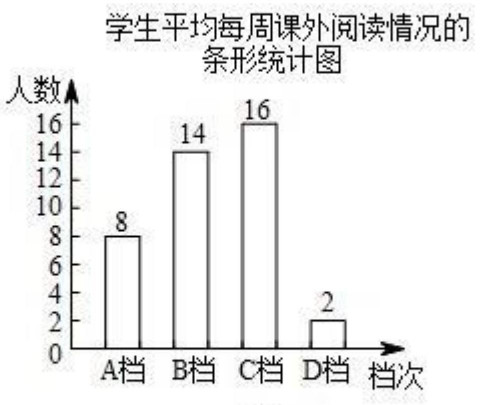


图2

【小问 4 详解】

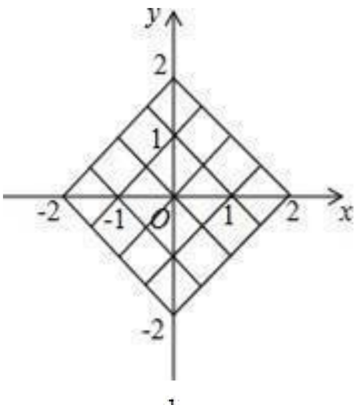
估计每周课外阅读时间为$6\le t<8$的学生人数是$\dfrac{14+16}{40}\times 800=600$（人）.

【点睛】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，样本估计总体，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

23.．在一个不透明的布袋中装有三个小球，小球上分别标有数字－1、0、2，它们除了数字不同外，其他都完全相同．

（1） 随机地从布袋中摸出一个小球，则摸出的球为标有数字 2 的小球的概率为______；

（2） 小丽先从布袋中随机摸出一个小球，记下数字作为平面直角坐标系内点 M 的横坐标．再将此球放回、搅匀，然后由小华再从布袋中随机摸出一个小球，记下数字作为平面直角坐标系内点 M 的纵坐标，请用树状图或表格列出点 M 所有可能的坐标，并求出点 M 落在如图所示的正方形网格内（包括边界）的概率．



【答案】（1）$\frac{1}{3}$；（2）列表见解析，$\frac{2}{3}$.

【解析】

【详解】试题分析:（1）一共有 3 种等可能的结果总数，摸出标有数字 2 的小球有 1 种可能，因此摸出的球为标有数字 2 的小球的概率为$\frac{1}{3}$;（2）利用列表得出共有 9 种等可能的结果数，再找出点 M 落在如图所示的正方形网格内（包括边界）的结果数，可求得结果.

试题解析：（1）P（摸出的球为标有数字 2 的小球）$=\frac{1}{3}$；（2）列表如下：

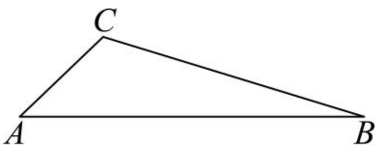
小华 小丽	-1	0	2
-1	（-1，-1）	（-1，0）	（-1，2）
0	（0，-1）	（0，0）	（0，2）
2	（2，-1）	（2，0）	（2，2）

共有 9 种等可能的结果数，其中点 M 落在如图所示的正方形网格内（包括边界）的结果数为 6，

∴P（点 M 落在如图所示的正方形网格内）$=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

考点：1 列表或树状图求概率；2 平面直角坐标系.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$ 为钝角.



（1）尺规作图：在边 AB 上确定一点 D，使 $\angle ADC=2\angle B$（不写作法，保留作图痕迹，并标明字母）；

（2）在（1）的条件下，若 $\angle B=15^{\circ}$，$CD=4$，$AC=\sqrt{7}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】（1）见解析　（2）$3\sqrt{3}+4$

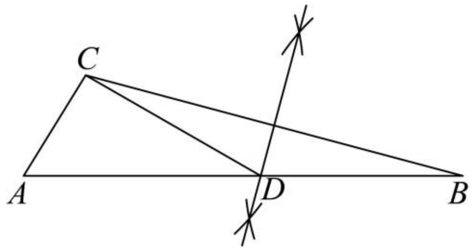
【解析】

【分析】（1）作 BC 和垂直平分线，交 AB 于 D，即可；

（2）过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，利用含30度角的直角三角形的性质以及勾股定理先后求得 CE、DE、AE 的长，再利用三角形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，点 D 为所作；



根据垂直平分平分线的性质，知： $CD=DB$，

$\therefore \angle DCB=\angle B$，

$\therefore \angle ADC=\angle DCB+\angle B=2\angle B$；

【小问 2 详解】

解：由（1）知 $\angle ADC=2\angle B$，$CD=DB$，

过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，

$\angle B=15°$，

$\therefore \angle ADC=2\angle B=30°$，

$CD=4$，

$\therefore CD=DB=4$，$CE=\frac{1}{2}CD=2$，

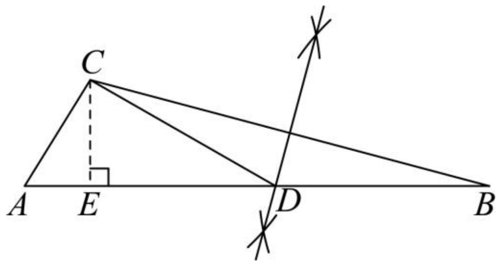
$\therefore DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=2\sqrt{3}$，

$AC=\sqrt{7}$，

$\therefore AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{3}$，

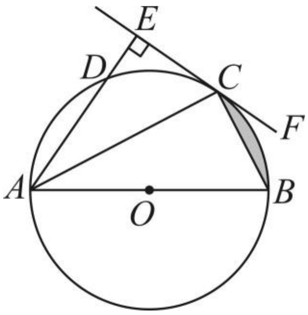
$\therefore AB=AE+ED+DB=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4=3\sqrt{3}+4$，

$\therefore$ ABC 的面积$=\dfrac{1}{2}\times AB\times CE=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(3\sqrt{3}+4\right)=3\sqrt{3}+4$.



【点睛】本题考查了基本作图以及线段垂直平分线的性质、含 30 度角的直角三角形的性质、勾股定理等，充分发挥基本图形的作用，利用线段垂直平分线的性质求解.

25. 如图，AB 为 O 的直径，C，D 为 O 上的两点，$\angle BAC=\angle DAC$，过点 C 作直线 $EF\perp AD$，交 AD 的延长线于点 E，连接 BC.



（1）求证：EF 是 $\odot O$ 的切线.

（2）若 $\angle CAO=30^\circ$，$BC=2$，求阴影部分面积.

【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

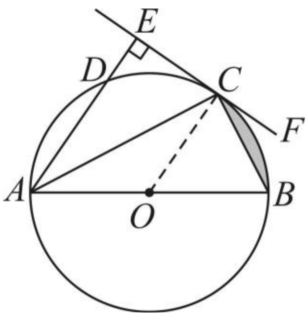
【解析】

【分析】（1）连接 OC，根据等腰三角形的性质得到 $\angle OAC=\angle DAC$，求得 $\angle DAC=\angle OCA$，推出 $AD\parallel OC$，得到 $\angle OCF=\angle AEC=90^\circ$，于是得到结论；

（2）根据圆周角定理求得 $\angle ACB=90^\circ$，然后利用含 30° 直角三角形的性质求得 $AB=2BC=4$，然后根据 $S_{扇形BOC}-S_{\triangle ABC}$ 即可得到结论.

【小问 1 详解】

解：连接 OC，



$\because OA=OC$，

$\therefore \angle OAC=\angle OCA$，

$\because \angle DAC=\angle BAC$，

$\therefore \angle DAC=\angle OCA$，

$\therefore AD\parallel OC$，

$\because EF\perp AD$，

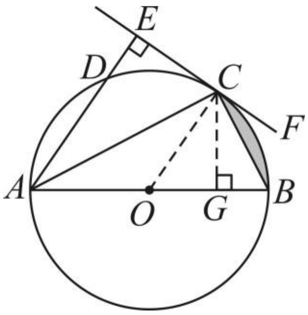
$\therefore \angle AEC=90^\circ$，

$\therefore \angle OCF=\angle AEC=90^\circ$，

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

解：过点 C 作 $CG\perp OB$ 于点 G，如图所示：



AB为 $\odot O$的直径，

$\therefore \angle ACB = 90°$，

$\angle CAO = 30°$， $BC = 2$，

$\therefore \angle BOC = 60°$， $AB = 2BC = 4$，

$\therefore OB = \frac{1}{2}AB = 2$，

$\because OB = OC$，

$\therefore \triangle BOC$为等边三角形，

$\therefore CG = OC \times \sin 60° = \sqrt{3}$，

$\therefore$阴影部分面积$= S_{扇形BOC} - S_{\triangle OBC}$

$= \frac{60}{360}\pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}$

$= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了切线的判定和性质，扇形面积的计算，正确的作出辅助线是解题的关键.

26. 为响应国家“双减”政策．提高同学们的创新思维，某中学开设了创新思维课程．为满足学生的需求，准备再购买一些A型号和B型号的电脑．如果分别用8000元购买A、B型号电脑，购买A型号台数比B型号少2台、已知B型号电脑的单价为A型号的$\frac{4}{5}$.

（1） 求两种型号电脑单价分别为多少元；

（2） 学校计划新建两个电脑室需购买80台电脑，学校计划总费用不多于72000元，并且要求A型电脑数量不能低于15台，那么应如何安排购买方案才能使费用最少，最少费用应为多少？

【答案】（1）设每台 A型号电脑进价为1000元，每台B型号电脑进价为800元；

（2）购买15台A型号电脑， 65台B型号电脑时费用最少，最少费用为67000元.

【解析】

【分析】(1）设每台A型号电脑进价为a元，每台B型号电脑进价为$\frac{4}{5}a$元，由“分别用8000元购买A、B型号电脑，购买A型号台数数比B型号少2台”列出方程即可求解；

（2）设购买A型号电脑 x 台，则购买 B 型号电脑 $(80-x)$ 台，设总费用为 y 元，根据题意可求 y 与 x 关系，并列出不等式组求出 x 的取值范围，再根据一次函数的性质解答即可.

【小问 1 详解】

解：设每台A型号电脑进价为 a 元，每台 B 型号电脑进价为 $\frac{4}{5}a$ 元，根据题意，得：

$$\frac{8000}{a}+2=\frac{8000}{\frac{4}{5}a}$$

解得 $a=1000$，

经检验，$a=1000$ 是原方程的解并满足题意，

$\therefore B$ 型号电脑进价为：$\frac{4}{5}a=800$

答：设每台A型号电脑进价为1000元，每台 B 型号电脑进价为800元；

【小问 2 详解】

设购买A型号电脑 x 台，则购买 B 型号电脑 $(80-x)$ 台，设总费用为 y 元，根据题意得：

$$\begin{cases}1000x+800(80-x)\le 72000\\ x\ge 15\end{cases}$$

解得 $15\le x\le 40$，

由题意得，$y=1000x+800(80-x)=200x+64000$，

$200>0$，

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=15$ 时费用最少，最少费用为 $y=200\times 15+64000=67000$，

$80-15=65$(台)，

答：购买15台A型号电脑，65台 B 型号电脑时费用最少，最少费用为67000元.

【点睛】本题考查了一次函数的应用，分式方程的应用，一元一次不等式组的应用，分析题意，找到合适的数量关系是解决问题的关键.

27. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，

备用图

（1）点 E 是边 CD 上一点，将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折，得到 $\triangle AFE$.

①如图1，当 AF 平分 $\angle EAD$ 时，求 BE 的长；

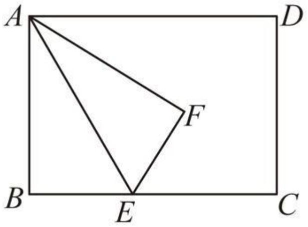


图1

②如图2，连接 DF，当 $BE=1$ 时，求　ADF 的面积；

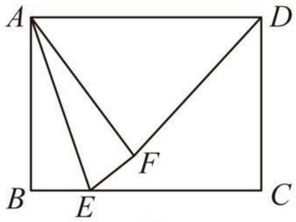


图2

（2） 点 E 为射线 BC 上一动点，将矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 进行翻折，点 C 的对应点为 C'，当点 E，C'，D 三点共线时，求 BE 的长．

【答案】（1）① $BE=\sqrt{3}$；② $\frac{24}{5}$

（2） BE 的长为 $4+\sqrt{7}$ 或 $4-\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）①根据折叠的性质以及 F 平分 $\angle EAD$，得出 $\angle BAE=30°$，根据勾股定理，含30度角的直角三角形的性质，得出 $BE=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$，即可求解；

②延长 EF 交 AD 的延长线于点 G，根据折叠的性质以及矩形的性质得出 $FG=GA$，进而在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中，勾股定理求得 DG 的长，等面积法求得 AD 边上的高，进而根据三角形的面积公式即可求解；

（2）分两种情况，①当 E 在 BC 的延长线上时，证明　$CDE\cong$　$B'AD$，②当 E 在线段 BC 上时，分别讨论即可求解．

【小问 1 详解】

解：①∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle BAD=90°$，

∵折叠，

∴ $\angle BAE=\angle FAE$，

∵ AF 平分 $\angle EAD$，

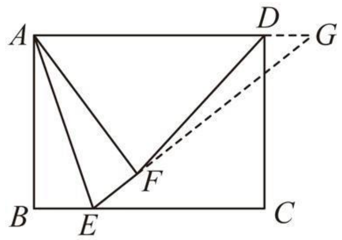
∴ $\angle DAF=\angle FAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAF=\angle FAE=\dfrac{1}{3}\angle BAD=\dfrac{1}{3}\times 90^{\circ}=30^{\circ}$，

$\therefore 2BE=AE, AB=\sqrt{AE^{2}-BE^{2}}=\sqrt{3}BE$

$\therefore BE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times 3=\sqrt{3}$；

②如图所示，延长 EF 交 AD 的延长线于点 G，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD\parallel BC$，

$\therefore \angle GAE=\angle AEB$，

$\because$ 折叠，

$\therefore AF=AB=3$， $BE=EF=1$， $\angle AEB=\angle AEF$，

$\therefore \angle GAE=\angle AEG$，

$\therefore AG=GE$，

$\because AD=4$，

$\therefore AG=AD+DG=4+DG=FG+EF=FG+1$，

$\therefore FG=DG+3$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFG$ 中， $AF^{2}+FG^{2}=AG^{2}$，

即 $3^{2}+\left(DG+3\right)^{2}=\left(DG+4\right)^{2}$，

解得： $DG=1$，

$\therefore FG=DG+3=4$， $AG=4+1=5$，

设 AG 边上的高为 h，则 $\dfrac{1}{2}AG\times h=\dfrac{1}{2}AF\times FG$，

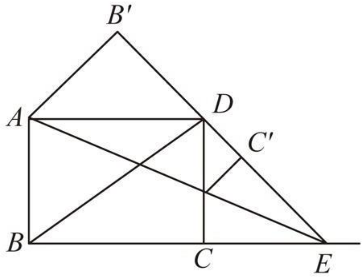
$\therefore h=\dfrac{AF\times FG}{AG}=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore$ ADF 的面积$=\dfrac{1}{2}AD\times h=\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{24}{5}$；

【小问 2 详解】

当点 E，C'，D 三点共线时，分两种情况：

①当 E 在 BC 的延长线上时，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=\angle BCD=90^\circ$， $AD=BC=4, CD=AB=3, AD \parallel BC$，

$\therefore \angle DCE=90^\circ$，$\angle CED=\angle B'DA$，

由折叠的性质得： $AB'=AB=3$，$\angle B'=\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle DCE=\angle B'$，$DC=AB'$，

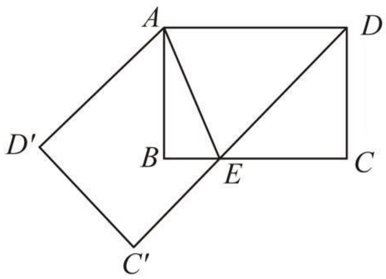
$\therefore$ $CDE\cong$ $B'AD$，

$\therefore DE=AD=4$，

$\therefore CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，

$\therefore BE=BC+CE=4+\sqrt{7}$；

②当 E 在线段 BC 上时，



由折叠的性质得： $\angle AEC'=\angle AEC$，

$\because \angle BEC'=\angle DEC$，

$\therefore \angle AEB=\angle AED$，

$\because$ $AD \parallel BC$，

$\therefore \angle AEB=\angle DAE$，

$\therefore \angle DAE=\angle AED$，

$\therefore DE=AD=4$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理得： $CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，

$\therefore BE=BC-CE=4-\sqrt{7}$；

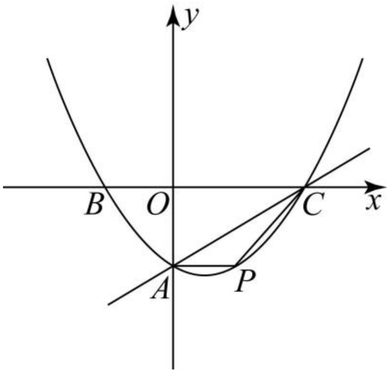
综上所述，BE 的长为 $4+\sqrt{7}$ 或 $4-\sqrt{7}$．

【点睛】本题主要考查了矩形的性质、折叠的性质、全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、勾股定理等知识，熟练掌握矩形的性质和折叠的性质，证明三角形全等是解题的关键．

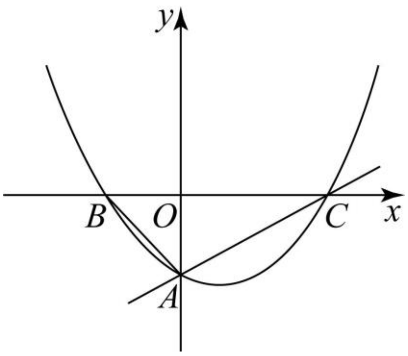
28. 如图，直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 交 x 轴于点 C，交 y 轴于点A，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 过点A，与 x 轴交于点 B、C．

（1） 求该抛物线的解析式．

（2） 如图 1，点 P 在抛物线上，横坐标为 2．Q 是抛物线上的动点，且在直线 AC 上方．若 $S_{\Delta QAC}>3S_{\Delta PAC}$ 恒成立，求点 Q 的横坐标 x_Q 的取值范围．



（3） 如图 2，连接 AB，点 $M(m,0)$ 为 x 轴上一动点，将 OAB 绕点 M 逆时针旋转 $90°$，得到 $\triangle O'A'B'$，若 $\triangle O'A'B'$ 的边与抛物线有交点，直接写出 m 的取值范围．



【答案】（1） $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2$

（2） 点 Q 的横坐标 x_Q 的取值范围为 $x<-3$ 或 $x>6$

（3） $3-\sqrt{17}<m<-2$ 或 $0<m<2$ 时，$\triangle O'A'B'$ 的边与抛物线有交点，

【解析】

【分析】（1）根据待定系数法求解析式即可求解；

（2） 过点 B 作 AC 的平行线 l，根据 A,B,C,P 的坐标得出 $S_{ABC}=3S_{APC}$，结合题意，求得 l 与抛物线的另一个交点，结合图形即可求解；

（3）根据题意得出O'在直线$y=-x$上运动，分别求得对应顶点落在抛物线上时的m的值，结合函数图象即可求解.

【小问 1 详解】

解：由$y=\frac{1}{2}x-2$，当$x=0$时，得$y=-2$，

当$y=0$时，$x=4$，

$\therefore C(4,0)$，$A(0,-2)$，

代入$y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$，得，

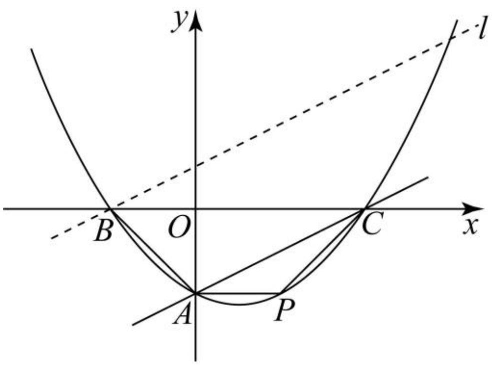
$$\begin{cases}\frac{1}{4}\times 4^2+4b-2=0\\ c=-2\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\\ c=-2\end{cases}$，

解得：$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2$，

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点B作AC的平行线，



$\because P$点的横坐标为2，当$x=2$时，$y=\frac{1}{4}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 2-2=-2$

则$P(2,-2)$

$\because A(0,-2)$，$C(4,0)$，

$\therefore S_{APC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

设直线AC的解析式为$y=kx-2$，将点$C(4,0)$代入得，

则 $4k-2=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$

$\because B(-2,0)$,

$\therefore S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AO=\frac{1}{2}\times6\times2=6$

$\therefore S_{ABC}=3S_{APC}$，

设过点 B 的直线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+b$，将点 $B(-2,0)$ 代入，得 $0=\frac{1}{2}\times(-2)+b$，

解得：$b=1$，

$\therefore$ 线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 \\ y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$

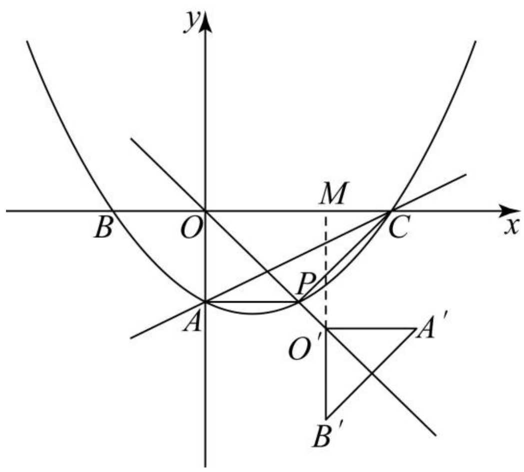
则直线 l 与抛物线的另一个交点为 $(6,4)$，

依题意，$S_{\Delta QAC}>3S_{\Delta PAC}$ 恒成立，

$\therefore$ 点 Q 的横坐标 x_Q 的取值范围为 $x<-3$ 或 $x>6$．

【小问 3 详解】

解：如图所示，



$\because OA=OB=2$，则 OAB 是等腰直角三角形，

$\therefore \triangle O'A'B'$ 是等腰直角三角形，

∵点 $M(m,0)$ 为 x 轴上一动点，将 OAB 绕点 M 逆时针旋转$90°$，得到$\triangle O'A'B'$，

$\therefore OM=O'M$

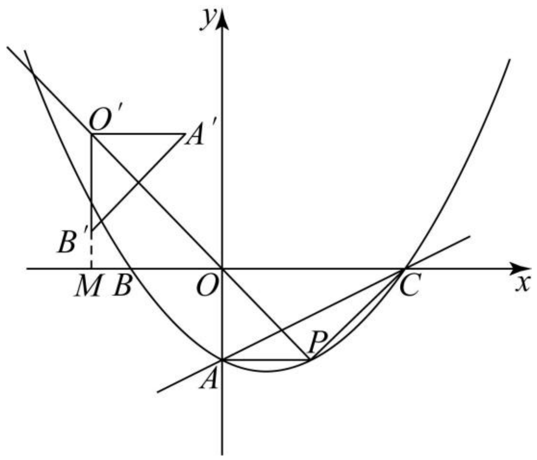
根据图象可知，O' 在直线 $y=-x$ 上运动，

∴当O' 与点 P 重合时，$\triangle O'A'B'$的顶点与抛物线有交点，此时 $MO'=AP=2$，即 $m=2$，

当 B' 与点A 重合时，此时 $m=0$

∴ $0<m<2$时，$\triangle O'A'B'$的边与抛物线有交点，

同理，当 B' 与点 B 重合时，此时 $m=-2$



当 A' 在抛物线上，此时 $MO'=MO=m, A'(m+2,m)$

代入抛物线解析式即：$m=\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2$

解得：$m=3-\sqrt{17}$ 或 $m=\sqrt{17}+3$（舍去）

∴当$3-\sqrt{17}<m<-2$时，$\triangle O'A'B'$的边与抛物线有交点，

综上所述，$3-\sqrt{17}<m<-2$ 或 $0<m<2$时，$\triangle O'A'B'$的边与抛物线有交点，

【点睛】本题考查了二次函数的综合运用，待定系数法求解析式，面积问题，旋转的性质，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.