

2022-2023 学年江苏省扬州市邗江区梅苑双语学校八年级（下）期末数学 试卷

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，满分共 24 分.在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1.（3 分）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



2.（3 分）下列二次根式中，属于最简二次根式的是（ ）



3.（3 分）已知关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1} + (2k-3)x + 4 = 0$ 是一元二次方程，则 k 的值应为（ ）

A. ± 3 B. 3 C. -3 D. 不能确定

4.（3 分）下面有四种说法：其中，正确的说法是（ ）

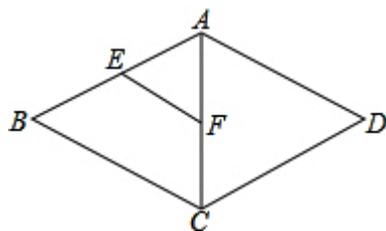
- ①为了解一种灯泡的使用寿命，宜采用普查的方法；
- ②“在同一年出生的 367 名学生中，至少有两人的生日是同一天”是必然事件；
- ③“打开电视机，正在播放少儿节目”是随机事件；
- ④如果一件事发生的概率只有十万分之一，那么它仍是可能发生的事件。

A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

5.（3 分）计算 $\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-2}$ 的结果是（ ）

A. 0 B. 1 C. -1 D. x

6.（3 分）如图，菱形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，若 $EF=3$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长是（ ）



A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

7.（3 分）已知下列命题，其中真命题的个数是（ ）

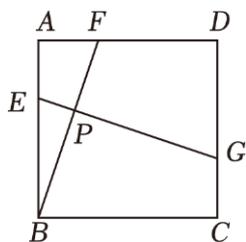
- ①若 $a^2=b^2$ ，则 $a=b$ ；
- ②对角线互相垂直平分的四边形是菱形；

③两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

④在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中，如果函数值 $y < 1$ 时，那么自变量 $x > 2$.

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

8. (3分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 分别在 AB 、 AD 、 CD 上， $AB=3$ ， $AE=1$ ， $DG > AE$ ， $BF=EG$ ， BF 与 EG 交于点 P 。连接 DP ，则 DP 的最小值为 ()



- A. $\sqrt{13} - 1$ B. $2\sqrt{13}$ C. $\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{13} - 2$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分共 30 分.不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置出）

9. (3分) 若式子 $\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 _____.

10. (3分) 化简： $\frac{a^2}{b^2c} \cdot \left(-\frac{bc^2}{2a}\right) =$ _____.

11. (3分) 为了解我市 2019 年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取 150 名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是_____.

12. (3分) 如果 $x=0$ 是关于 x 的方程 $ax^2+3x+a^2 - a=0$ 的一个根，则 $a=$ _____.

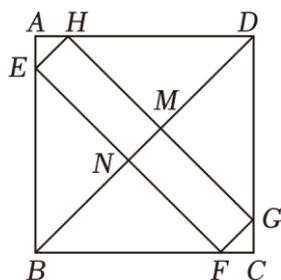
13. (3分) 已知 $\sqrt{x}=3$ ，那么 $x^2=$ _____.

14. (3分) 已知关于 x 的方程 $\frac{3x+n}{2x+1}=2$ 的解是负数，则 n 的取值范围为 _____.

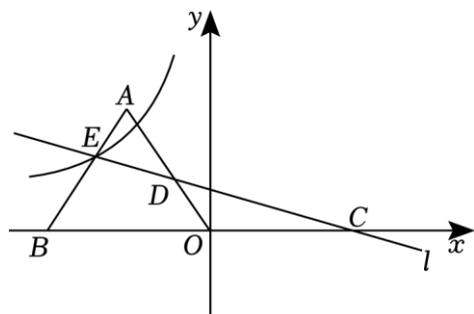
15. (3分) 若最简二次根式 $\frac{3}{2}\sqrt{4a^2+1}$ 与 $\frac{2}{3}\sqrt{6a^2-1}$ 是同类二次根式，则 $a=$ _____.

16. (3分) 已知双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 与直线 $y = x - 5$ 有一交点为 (a, b) 。则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$ _____.

17. (3分) 如图，四边形 $EFGH$ 的四个顶点 E 、 F 、 G 、 H 分别在正方形 $ABCD$ 的 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上滑动，在滑动的过程中，始终有 $EH \parallel BD \parallel FG$ ，且 $EH = FG$ ，四边形 $EFGH$ 的周长为 $6\sqrt{2}a$ ，那么正方形 $ABCD$ 的周长为 _____.



18. (3分) 如图, $\triangle AOB$ 为等边三角形, 点 B 的坐标为 $(-6, 0)$, 过点 $C(6, 0)$ 作直线 l 交 AO 于 D , 交 AB 于 E , 点 E 在某反比例函数图象上, 当 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCO$ 的面积相等时, 那么该反比例函数的解析式为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.



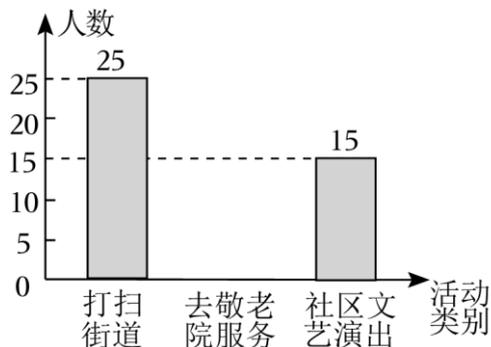
三、解答题（本大题共有 10 个小题，满分共 96 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

19. (8分) (1) 计算: $(3+2\sqrt{5})^2 - (4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$;

(2) 解方程: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 2$.

20. (8分) 先化简, 再求值: $\frac{x-1}{x-2} \div (\frac{3}{x-2} + x + 2)$, 然后从不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 2x \geq -2 \end{cases}$ 的解集中, 选取一个你认为符合题意的整数 x 的值代入求值.

21. (8分) 今年 3 月 5 日, 学校组织八年级全体学生参加了“走出校门, 服务社会”的活动. 八(3)班班长统计了该天本班学生打扫街道、去敬老院服务和到社区文艺演出的人数, 并作了如下直方图和扇形统计图. 请根据班长所作的两个图形, 解答:

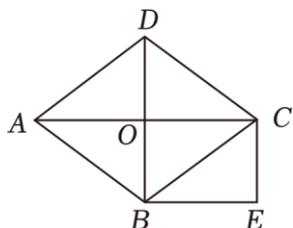


- (1) 八(3)班有多少名学生?

- (2) 补全直方图的空缺部分；
 (3) 若八年级有 1000 名学生，请估算该年级去敬老院有多少人？
 (4) 求“从八（3）班中任选一名学生去敬老院服务”的概率。

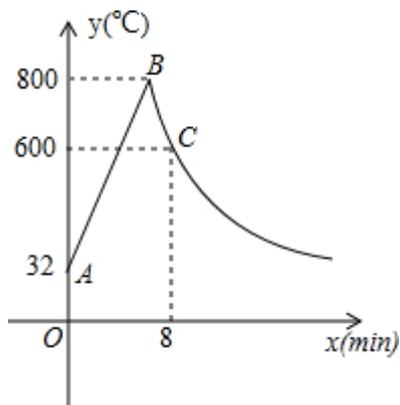
22. (8分) 如图， O 是菱形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 的交点， $CD=10cm$ ， $OD=6cm$ ；过点 C 作 $CE \parallel DB$ ，过点 B 作 $BE \parallel AC$ ， CE 与 BE 相交于点 E 。

- (1) 求 OC 的长；
 (2) 求证：四边形 $OBEC$ 为矩形；
 (3) 求矩形 $OBEC$ 的面积。



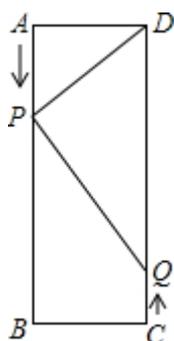
23. (10分) 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个工序，即需要将材料烧到 800°C ，然后停止煅烧进行锻造操作，经过 8min 时，材料温度降为 600°C 。煅烧时温度 y ($^{\circ}\text{C}$) 与时间 x (min) 成一次函数关系；锻造时，温度 y ($^{\circ}\text{C}$) 与时间 x (min) 成反比例函数关系（如图）。已知该材料初始温度是 32°C 。

- (1) 分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数关系式，并且写出自变量 x 的取值范围；
 (2) 根据工艺要求，当材料温度低于 480°C 时，须停止操作。那么锻造的操作时间有多长？



24. (10分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=16\text{cm}$ ， $BC=6\text{cm}$ ，点 P 从点 A 出发沿 AB 向点 B 移动（不与点 A 、 B 重合），一直到达点 B 为止；同时，点 Q 从点 C 出发沿 CD 向点 D 移动（不与点 C 、 D 重合）。

- (1) 若点 P 、 Q 均以 3cm/s 的速度移动，经过多长时间四边形 $BPDQ$ 为菱形？
 (2) 若点 P 为 3cm/s 的速度移动，点 Q 以 2cm/s 的速度移动，经过多长时间 $\triangle DPQ$ 为直角三角形？



25. (10分) 某市在道路改造过程中，需要铺设一条长为 1000 米的管道，决定由甲、乙两个工程队来完成这一工程。已知甲工程队比乙工程队每天能多铺设 20 米，且甲工程队铺设 350 米所用的天数与乙工程队铺设 250 米所用的天数相同。

(1) 甲、乙工程队每天各能铺设多少米？

(2) 如果要求完成该项工程的工期不超过 10 天，那么为两工程队分配工程量的方案有几种？请你帮助设计出来（工程队分配工程量为正整百数）。

26. (10分) 【阅读理解】对于任意正实数 a, b , $\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \therefore a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$,

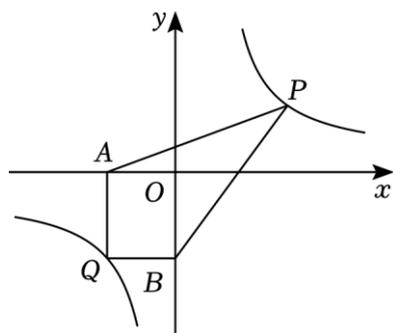
(只有当 $a = b$ 时, $a + b = 2\sqrt{ab}$).

【获得结论】在 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (a, b 均为正实数) 中, 若 ab 为定值 p , 则 $a + b \geq 2\sqrt{p}$, 只有当 $a = b$ 时, $a + b$ 有最小值 $2\sqrt{p}$.

【探索应用】根据上述内容, 回答下列问题:

(1) 若 $m > 0$, 只有当 $m =$ _____ 时, $m + \frac{4}{m}$ 有最小值 _____;

(2) 已知点 $Q(-4, -5)$ 是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上点, 过 Q 作 $QA \perp x$ 轴于点 A , 作 $QB \perp y$ 轴于点 B . 点 P 为双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 上任意一点, 连接 PA, PB , 求四边形 $AQBP$ 的面积的最小值.

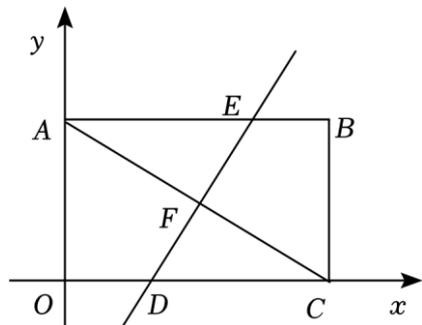


27. (12分) 如图, 平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的对角线 $AC = 5$, 边 $OA = 3$.

(1) 求 C 点的坐标;

(2) 把矩形 $OABC$ 沿直线 DE 对折使点 C 落在点 A 处, 直线 DE 与 OC, AC, AB 的交点分别为 D, F, E , 求折痕 DE 的长;

(3) 在 (2) 的条件下, 若点 M 在 x 轴上, 平面内是否存在点 N , 使四边形 $FDMN$ 是菱形? 若存在, 请直接写出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

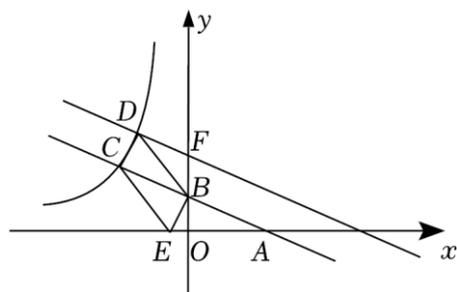


28. (12分) 如图所示, 直线 $y=ax+b$ ($a<0, b>0$) 的图象与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x<0$) 交于点 C , 且 B 为线段 AC 的中点, 向上平移直线 AB 与反比例函数的图象相交于点 D , 点 E 为 x 轴负半轴上一点, 四边形 $BDCE$ 为平行四边形.

(1) 若 $a=-\frac{1}{2}, b=1$, 则点 C 的坐标为 _____, 反比例函数的表达式为 _____;

(2) 在 (1) 的条件下, 求平移后的直线 DF 的函数表达式;

(3) 当平行四边形 $BDCE$ 的面积等于 30 时, 求 $\frac{b^2}{a}$ 的值.



2022-2023 学年江苏省扬州市邗江区梅苑双语学校八年级（下）期末数学 试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，满分共 24 分.在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1.（3 分）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



【答案】 D

【分析】根据轴对称：一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形；中心对称图形：在平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180° ，如果旋转后的图形与自身重合；由此问题可求解.

【解答】解：A、不是轴对称图形但是中心对称图形，故不符合题意；

B、是轴对称图形但不是中心对称图形，故不符合题意；

C、既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故不符合题意；

D、既是轴对称图形也是中心对称图形，故符合题意；

故选：D.

2.（3 分）下列二次根式中，属于最简二次根式的是（ ）



【答案】 B

【分析】直接利用最简二次根式的概念：（1）被开方数不含分母；（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 我们把满足上述两个条件的二次根式，叫做最简二次根式，进而得出答案.

【解答】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，不是最简二次根式，故此选项错误；

B、 $\sqrt{5}$ ，是最简二次根式，故此选项正确；

C、 $\sqrt{4} = 2$ ，不是最简二次根式，故此选项错误；

D、 $\sqrt{0.8} = \sqrt{\frac{4}{5}}$ ，不是最简二次根式，故此选项错误.

故选：B.

3. (3分) 已知关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1} + (2k-3)x + 4 = 0$ 是一元二次方程，则 k 的值应为 ()

- A. ± 3 B. 3 C. -3 D. 不能确定

【答案】 C

【分析】 根据一元二次方程的定义：未知数的最高次数是 2；二次项系数不为 0；是整式方程；含有一个未知数.

【解答】 解：由关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1} + (2k-3)x + 4 = 0$ 是一元二次方程，得 $|k| - 1 = 2$ 且 $k - 3 \neq 0$.

解得 $k = -3$.

故选：C.

4. (3分) 下面有四种说法：其中，正确的说法是 ()

- ①为了解一种灯泡的使用寿命，宜采用普查的方法；
 ②“在同一年出生的 367 名学生中，至少有两人的生日是同一天”是必然事件；
 ③“打开电视机，正在播放少儿节目”是随机事件；
 ④如果一件事发生的概率只有十万分之一，那么它仍是可能发生的事件.

- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

【答案】 D

【分析】 由普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似，

根据随机事件、必然事件、不可能事件，可得答案.

- 【解答】** 解：①为了解一种灯泡的使用寿命，调查具有破坏性，宜采用抽样调查的方法，故①错误；
 ②“在同一年出生的 367 名学生中，至少有两人的生日是同一天”是必然事件，故②正确；
 ③“打开电视机，正在播放少儿节目”是随机事件，故③正确；
 ④如果一件事发生的概率只有十万分之一，那么它仍是可能发生的事件，故④正确；

故选：D.

5. (3分) 计算 $\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-2}$ 的结果是 ()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. x

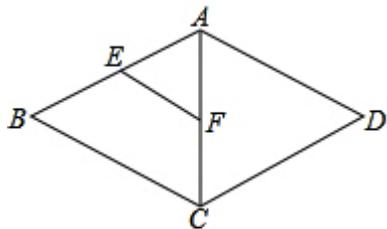
【答案】 C

【分析】 原式利用同分母分式的减法法则计算，变形后约分即可得到结果.

【解答】 解：原式 $= \frac{2-x}{x-2} = -\frac{x-2}{x-2} = -1$.

故选：C.

6. (3分) 如图，菱形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，若 $EF=3$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长是 ()



- A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

【答案】 D

【分析】 根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出 BC ，再根据菱形的周长公式列式计算即可得解.

【解答】 解：∵ E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，

∴ EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

∴ $BC=2EF=2\times 3=6$ ，

∴ 菱形 $ABCD$ 的周长 $=4BC=4\times 6=24$.

故选：D.

7. (3分) 已知下列命题，其中真命题的个数是 ()

①若 $a^2=b^2$ ，则 $a=b$ ；

②对角线互相垂直平分的四边形是菱形；

③两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

④在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 中，如果函数值 $y<1$ 时，那么自变量 $x>2$.

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【答案】 C

【分析】 利用有理数的性质、菱形、矩形的判定及反比例函数的性质对每个小题逐一判断后即可确定正确的选项.

【解答】 解：①若 $a^2=b^2$ ，则 $a=b$ ，错误，是假命题；

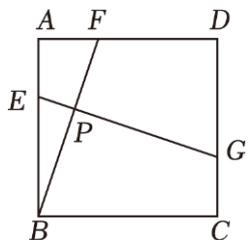
②对角线互相垂直平分的四边形是菱形，正确，是真命题；

③两组对角分别相等的四边形是平行四边形，正确，是真命题；

④在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 中，如果函数值 $y<1$ 时，那么自变量 $x>2$ ，错误，是假命题.

故选：C.

8. (3分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 分别在 AB 、 AD 、 CD 上, $AB=3$, $AE=1$, $DG > AE$, $BF=EG$, BF 与 EG 交于点 P . 连接 DP , 则 DP 的最小值为 ()

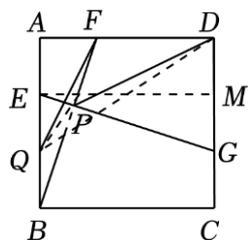


- A. $\sqrt{13}-1$ B. $2\sqrt{13}$ C. $\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{13}-2$

【答案】A

【分析】过点 E 作 $EM \perp CD$ 于点 M , 取 BE 的中点 Q , 连接 QP 、 QD , 根据正方形的性质证明 $\text{Rt}\triangle BAF \cong \text{Rt}\triangle EMG$ (HL), 然后根据直角三角形性质可得 $QP = \frac{1}{2}BE$, 当 Q 、 D 、 P 共线时, DP 有最小值, 根据勾股定理即可解决问题.

【解答】解: 如图, 过点 E 作 $EM \perp CD$ 于点 M , 取 BE 的中点 Q , 连接 QP 、 QD ,



- ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 ∴ $AB=AD$, $\angle A = \angle ADC = \angle DME = 90^\circ$, $AB \parallel CD$,
 ∴ 四边形 $ADME$ 是矩形,
 ∴ $EM=AD=AB$,

在 $\text{Rt}\triangle BAF$ 和 $\text{Rt}\triangle EMG$ 中,

$$\begin{cases} BF=EG \\ AB=ME \end{cases}$$

- ∴ $\text{Rt}\triangle BAF \cong \text{Rt}\triangle EMG$ (HL),
 ∴ $\angle ABF = \angle MEG$, $\angle AFB = \angle EGM$,
 ∴ $AB \parallel CD$,
 ∴ $\angle MGE = \angle BEG = \angle AFB$,
 ∴ $\angle ABF + \angle AFB = 90^\circ$,
 ∴ $\angle ABF + \angle BEG = 90^\circ$,
 ∴ $\angle EPF = 90^\circ$,

$$\therefore BF \perp EG,$$

$\therefore \triangle EPB$ 是直角三角形, Q 是 BE 的中点,

$$\therefore QP = \frac{1}{2}BE,$$

$$\therefore AB = 3, AE = 1,$$

$$\therefore BE = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore QB = QE = 1,$$

$$\therefore QD - QP \leq DP,$$

\therefore 当 Q 、 D 、 P 共线时, DP 有最小值,

$$\therefore QP = \frac{1}{2}BE = 1, AQ = AE + EQ = 1 + 1 = 2,$$

$$\therefore QD = \sqrt{AD^2 + AQ^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore PD = \sqrt{13} - 1,$$

$$\therefore PD \text{ 的最小值为 } \sqrt{13} - 1.$$

故选: A.

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分共 30 分.不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置出）

9. (3 分) 若式子 $\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$.

【答案】 见试题解答内容

【分析】 根据二次根式有意义的条件可得 $x+2 \geq 0$ 且 $x \neq 0$, 再解即可.

【解答】 解: 由题意得: $x+2 \geq 0$ 且 $x \neq 0$,

解得: $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$,

故答案为: $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$.

10. (3 分) 化简: $\frac{a^2}{b^2c} \cdot \left(-\frac{bc^2}{2a}\right) = -\frac{ac}{2b}$.

【答案】 $-\frac{ac}{2b}$.

【分析】 根据分式的性质约分计算即可.

【解答】 解: $\frac{a^2}{b^2c} \cdot \left(-\frac{bc^2}{2a}\right)$

$$= -\frac{a^2}{b^2 c} \cdot \frac{bc^2}{2a}$$

$$= -\frac{ac}{2b}$$

故答案为： $-\frac{ac}{2b}$ 。

11. (3分) 为了解我市 2019 年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取 150 名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是 被抽取 150 名考生的中考数学成绩。

【答案】 被抽取 150 名考生的中考数学成绩。

【分析】 总体是指考查的对象的全体，个体是总体中的每一个考查的对象，样本是总体中所抽取的一部分个体，而样本容量则是指样本中个体的数目。我们在区分总体、个体、样本、样本容量，这四个概念时，首先找出考查的对象。从而找出总体、个体。再根据被收集数据的这一部分对象找出样本，最后再根据样本确定出样本容量。

【解答】 解：为了解我市 2019 年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取 150 名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是被抽取 150 名考生的中考数学成绩。

故答案为：被抽取 150 名考生的中考数学成绩。

12. (3分) 如果 $x=0$ 是关于 x 的方程 $ax^2+3x+a^2-a=0$ 的一个根，则 $a=$ 0 或 1。

【答案】 0 或 1。

【分析】 把 $x=0$ 代入已知方程，列出关于 a 的新方程，通过解新方程求得 a 的值即可。

【解答】 解：把 $x=0$ 代入 $ax^2+3x+a^2-a=0$ ，得：

$$a^2 - a = 0,$$

解得： $a=0$ 或 $a=1$ ，

故答案为：0 或 1。

13. (3分) 已知 $\sqrt{x}=3$ ，那么 $x^2=$ 81。

【答案】 81。

【分析】 先求出 x 值，再求平方即可。

【解答】 解： $\because \sqrt{x}=3$ ，

$$\therefore x=9,$$

$$\therefore x^2=81,$$

故答案为：81。

14. (3分) 已知关于 x 的方程 $\frac{3x+n}{2x+1}=2$ 的解是负数, 则 n 的取值范围为 $\underline{n < 2 \text{ 且 } n \neq \frac{3}{2}}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】求出分式方程的解 $x=n-2$, 得出 $n-2 < 0$, 求出 n 的范围, 根据分式方程得出 $n-2 \neq -\frac{1}{2}$,

求出 n , 即可得出答案.

【解答】解: $\frac{3x+n}{2x+1}=2$,

解方程得: $x=n-2$,

\therefore 关于 x 的方程 $\frac{3x+n}{2x+1}=2$ 的解是负数,

$\therefore n-2 < 0$,

解得: $n < 2$,

又 \therefore 原方程有意义的条件为: $x \neq -\frac{1}{2}$,

$\therefore n-2 \neq -\frac{1}{2}$,

即 $n \neq \frac{3}{2}$.

故答案为: $n < 2$ 且 $n \neq \frac{3}{2}$.

15. (3分) 若最简二次根式 $\frac{3}{2}\sqrt{4a^2+1}$ 与 $\frac{2}{3}\sqrt{6a^2-1}$ 是同类二次根式, 则 $a = \underline{\pm 1}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】根据同类二次根式的定义列出方程求解即可.

【解答】解: \therefore 最简二次根式 $\frac{3}{2}\sqrt{4a^2+1}$ 与 $\frac{2}{3}\sqrt{6a^2-1}$ 是同类二次根式,

$\therefore 4a^2+1=6a^2-1$,

$\therefore a^2=1$,

解得 $a = \pm 1$.

故答案为: ± 1 .

16. (3分) 已知双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 与直线 $y = x - 5$ 有一交点为 (a, b) . 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \underline{-\frac{19}{3}}$.

【答案】 $-\frac{19}{3}$.

【分析】由双曲线与直线的交点为 (a, b) 可知 (a, b) 分别满足两个解析式, 即 $ab = -3$ 、 $a - b = 5$,

代入到原式 $= \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2+2ab}{ab}$ 可得答案.

【解答】解：∵双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 与直线 $y = x - 5$ 的交点坐标为 (a, b) ,

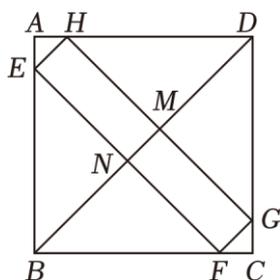
$$\therefore ab = -3, a - 5 = b,$$

$$\therefore a - b = 5,$$

$$\text{则原式} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2 + 2ab}{ab} = \frac{5^2 + 2 \times (-3)}{-3}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{19}{3}.$$

17. (3分) 如图, 四边形 $EFGH$ 的四个顶点 E, F, G, H 分别在正方形 $ABCD$ 的 AB, BC, CD, DA 上滑动, 在滑动的过程中, 始终有 $EH \parallel BD \parallel FG$, 且 $EH = FG$, 四边形 $EFGH$ 的周长为 $6\sqrt{2}a$, 那么正方形 $ABCD$ 的周长为 12a.



【答案】12a.

【分析】先证明 $\triangle AEH, \triangle CFG$ 都是等腰直角三角形, 证明 $\triangle AEH \cong \triangle CFG$ 得 $AE = AH = FC = CG$, 根据 $EH = \sqrt{2}AE, EF = \sqrt{2}EB$, 得 $EF + EH = \sqrt{2}AB$ 由此即可解决问题.

【解答】解：∵ $EH \parallel FG$, 且 $EH = FG$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

又∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = DA, \angle ABD = 45^\circ, \angle A = \angle C = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore EH \parallel BD,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle ABD = \angle AHE = 45^\circ,$$

同理 $\angle GFC = \angle FGC = 45^\circ$,

在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle CFG$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle AEH = \angle CFG, \\ EH = FG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CFG \text{ (AAS)},$$

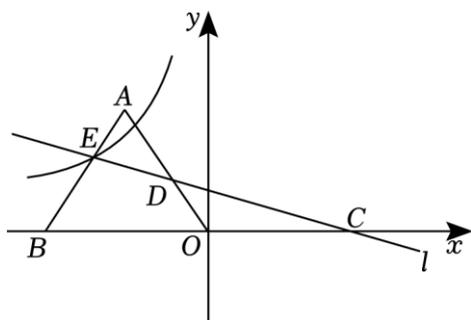
$$\therefore AE = CF = AH = CG,$$

$$\therefore BE = EF,$$

$$\begin{aligned} \because EH &= \sqrt{2} AE, EF = \sqrt{2} BE, \\ \therefore EH + EF &= \sqrt{2} (AE + EB) = \sqrt{2} AB, \\ \therefore EH + EF &= 3\sqrt{2} a, \\ \therefore AB &= 3a, \\ \therefore \text{正方形周长} &= 12a. \end{aligned}$$

故答案为：12a.

18. (3分) 如图， $\triangle AOB$ 为等边三角形，点 B 的坐标为 $(-6, 0)$ ，过点 $C(6, 0)$ 作直线 l 交 AO 于 D ，交 AB 于 E ，点 E 在某反比例函数图象上，当 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCO$ 的面积相等时，那么该反比例函数的解析式为 $y = \underline{\underline{\frac{27\sqrt{3}}{4x}}}$.



【答案】 $\frac{27\sqrt{3}}{4x}$.

【分析】 连接 AC ，过 A 作 $AF \perp BC$ ，垂足为 F ，根据等边三角形的性质和勾股定理求得 AF 和 AC 的长，利用面积的关系得出 $S_{\triangle AEC} = S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times AE \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot AF$ ，求出 AE ，可得点 E 的坐标，从而求出 k 值，得出解析式.

【解答】 解：连接 AC ，过 A 作 $AF \perp BC$ ，垂足为 F ，
 \because 点 B 的坐标为 $(-6, 0)$ ， $\triangle AOB$ 为等边三角形， $C(6, 0)$ ，
 $\therefore AO = OC = 6$ ， $OF = BF = 3$ ，
 $\therefore \angle OCA = \angle OAC$ ， $AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = 3\sqrt{3}$ ，
 \therefore 点 A 的坐标为 $(-3, 3\sqrt{3})$ ，
 $\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACO = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ，
 $\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 6\sqrt{3}$ ，
 $\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle DCO}$ ， $S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle ADC}$ ， $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle DCO} + S_{\triangle ADC}$ ，

$$\therefore S_{\triangle AEC} = S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times AE \cdot AC = \frac{1}{2} CO \cdot AF,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} AE \cdot 6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AE = 3.$$

$\therefore E$ 点为 AB 的中点，

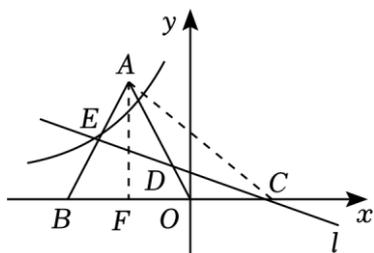
$$\therefore E \left(\frac{-6-3}{2}, \frac{0+3\sqrt{3}}{2} \right), \text{ 即 } \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} \right),$$

把 $E \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} \right)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$,

$$k = -\frac{27}{4}\sqrt{3}.$$

所以反比例函数解析式为 $y = -\frac{27\sqrt{3}}{4x}$,

故答案为: $-\frac{27\sqrt{3}}{4x}$.



【点睛】

三、解答题（本大题共有 10 个小题，满分共 96 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

19. (8分) (1) 计算: $(3+2\sqrt{5})^2 - (4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$;

(2) 解方程: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 2$.

【答案】 (1) $18+12\sqrt{5}$;

(2) 无解.

【分析】 (1) 原式利用完全平方公式和平方差公式展开，再合并计算；

(2) 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】 解: (1) $(3+2\sqrt{5})^2 - (4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$
 $= 9+20+12\sqrt{5} - 16+5$
 $= 18+12\sqrt{5}$;

$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 2,$$

方程两边乘以 $(x+1)(x-1)$ 得： $(x+1)^2 - 4 = 2(x+1)(x-1)$,

解得： $x=1$,

检验：当 $x=1$ 时， $(x+1)(x-1) = 0$,

$\therefore x=1$ 是原方程的增根，

\therefore 原方程无解.

20. (8分) 先化简，再求值： $\frac{x-1}{x-2} \div (\frac{x+2}{x-2} + \frac{3}{x-2})$ ，然后从不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 2x \geq -2 \end{cases}$ 的解集中，选取一个你认为符合题意的整数 x 的值代入求值.

【答案】 见试题解答内容

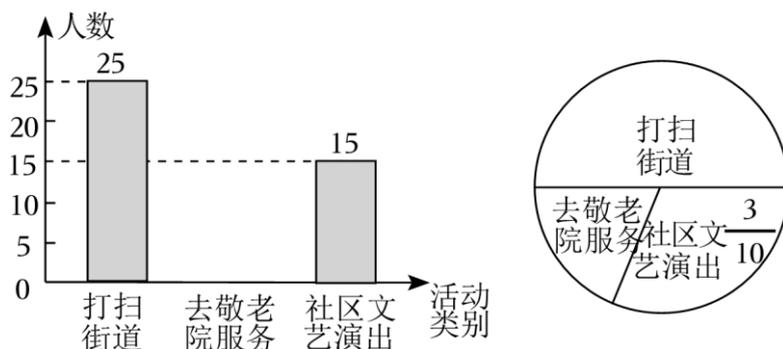
【分析】 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，求出不等式组的解集，找出解集中满足题意 x 的值，代入计算即可求出值.

【解答】 解：原式 $= \frac{x-1}{x-2} \div \frac{(x+2)(x-2)+3}{x-2} = \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$,

不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 2x \geq -2 \end{cases}$ 的解集为 $-1 \leq x \leq 2$,

担当 $x=0$ 时，原式 $= 1$.

21. (8分) 今年3月5日，学校组织八年级全体学生参加了“走出校门，服务社会”的活动. 八(3)班班长统计了该天本班学生打扫街道、去敬老院服务和到社区文艺演出的人数，并作了如下直方图和扇形统计图. 请根据班长所作的两个图形，解答：



- (1) 八(3)班有多少名学生？
- (2) 补全直方图的空缺部分；
- (3) 若八年级有 1000 名学生，请估算该年级去敬老院有多少人？
- (4) 求“从八(3)班中任选一名学生去敬老院服务”的概率.

【答案】 (1) 50 人；

(2) 见解析；

(3) 200 人；

(4) $\frac{1}{5}$.

【分析】(1) 本题需先根据条形图知到社区文艺演出的人数为 15 人，再有它们在图中所占的比例即可求出该班的学生人数；

(2) 用总人数减去打扫街道和去社区文艺演出的人数，求出去敬老院服务的学生数，即可补全统计图；

(3) 用总人数乘以该年级去敬老院的人数所占的百分比即可；

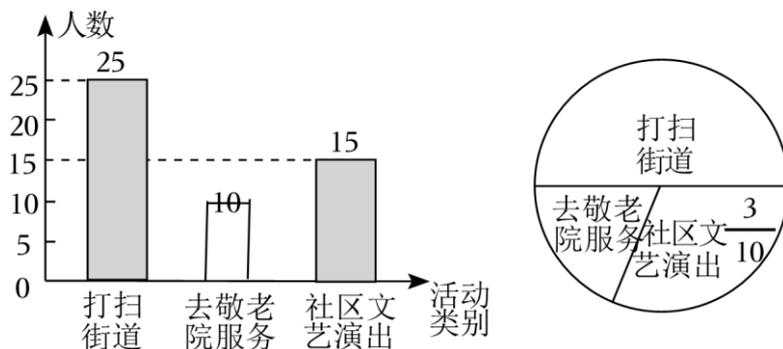
(4) 用去敬老院服务的人数除以抽取的人数即可确定答案.

【解答】解：(1) 由条形图知到社区文艺演出的人数为 15 人，由扇形图知到社区文艺演出的人数占全体的 $\frac{3}{10}$,

所以抽取的部分同学的人数 $15 \div \frac{3}{10} = 50$ 人；

(2) 根据题意，去敬老院服务的人数是：50 - 25 - 15 = 10 (人)，

如图：



(3) 根据题意得：

$$1000 \times \frac{10}{50} = 200 \text{ (人)}.$$

答：该年级去敬老院的人数是 200 人；

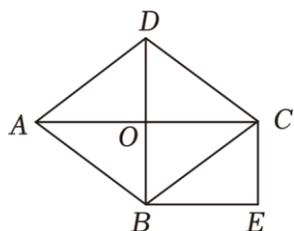
(4) “从八(3)班中任选一名学生去敬老院服务”的概率为 $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$.

22. (8分) 如图，O 是菱形 ABCD 对角线 AC 与 BD 的交点，CD=10cm，OD=6cm；过点 C 作 CE//DB，过点 B 作 BE//AC，CE 与 BE 相交于点 E.

(1) 求 OC 的长；

(2) 求证：四边形 OBEC 为矩形；

(3) 求矩形 OBEC 的面积.



【答案】 (1) 8cm ;

(2) 见解析;

(3) 48cm^2 .

【分析】 (1) 利用菱形的性质得到 $AC \perp BD$ ，在直角 $\triangle OCD$ 中，利用勾股定理即可求解；

(2) 先证明四边形 $OBEC$ 是平行四边形，再由 $\angle COB = 90^\circ$ ，即可证明平行四边形 $OBEC$ 是矩形；

(3) 利用矩形的面积公式即可直接求解.

【解答】 (1) 解： \because 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$,

\therefore 直角 $\triangle OCD$ 中， $OC = \sqrt{CD^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm}$,

(2) 证明： $\because CE \parallel DB$, $BE \parallel AC$,

\therefore 四边形 $OBEC$ 为平行四边形，

又 $\because AC \perp BD$ ，即 $\angle COB = 90^\circ$ ，

\therefore 平行四边形 $OBEC$ 为矩形；

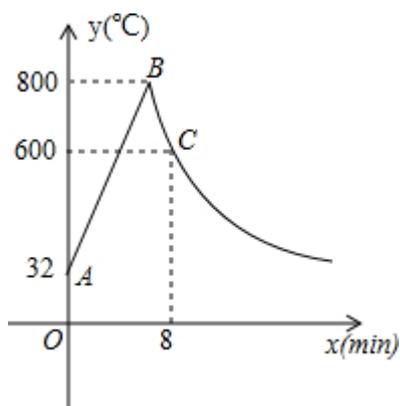
(3) 解： $\because OB = OD$,

$\therefore S_{\text{矩形} OBEC} = OB \cdot OC = 6 \times 8 = 48 (\text{cm}^2)$.

23. (10 分) 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个工序，即需要将材料烧到 800°C ，然后停止煅烧进行锻造操作，经过 8min 时，材料温度降为 600°C 。煅烧时温度 y ($^\circ\text{C}$) 与时间 x (min) 成一次函数关系；锻造时，温度 y ($^\circ\text{C}$) 与时间 x (min) 成反比例函数关系 (如图)。已知该材料初始温度是 32°C 。

(1) 分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数关系式，并且写出自变量 x 的取值范围；

(2) 根据工艺要求，当材料温度低于 480°C 时，须停止操作。那么锻造的操作时间有多长？



【答案】见试题解答内容

【分析】（1）首先根据题意，材料煅烧时，温度 y 与时间 x 成一次函数关系；锻造操作时，温度 y 与时间 x 成反比例关系；将题中数据代入用待定系数法可得两个函数的关系式；

（2）把 $y=480$ 代入 $y=\frac{4800}{x}$ 中，进一步求解可得答案.

【解答】解：（1）材料锻造时，设 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

$$\text{由题意得 } 600 = \frac{k}{8},$$

$$\text{解得 } k=4800,$$

当 $y=800$ 时,

$$\frac{4800}{x} = 800$$

$$\text{解得 } x=6,$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(6, 800)$

材料煅烧时，设 $y=ax+32$ ($a \neq 0$),

$$\text{由题意得 } 800 = 6a + 32,$$

$$\text{解得 } a=128,$$

\therefore 材料煅烧时， y 与 x 的函数关系式为 $y=128x+32$ ($0 \leq x \leq 6$).

$$\therefore 4800 \div 32 = 150,$$

\therefore 锻造操作时 y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{4800}{x}$ ($6 < x \leq 150$);

（2）把 $y=480$ 代入 $y=\frac{4800}{x}$ ，得 $x=10$,

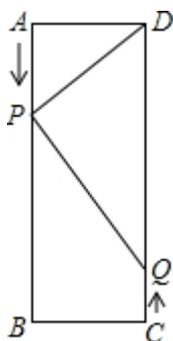
$$10 - 6 = 4 \text{ (分)},$$

答：锻造的操作时间 4 分钟.

24. (10分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=16\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发沿 AB 向点 B 移动 (不与点 A 、 B 重合), 一直到达点 B 为止; 同时, 点 Q 从点 C 出发沿 CD 向点 D 移动 (不与点 C 、 D 重合).

(1) 若点 P 、 Q 均以 3cm/s 的速度移动, 经过多长时间四边形 $BPDQ$ 为菱形?

(2) 若点 P 为 3cm/s 的速度移动, 点 Q 以 2cm/s 的速度移动, 经过多长时间 $\triangle DPQ$ 为直角三角形?



【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 根据矩形的性质可得出 $AB \parallel CD$, 再由点 P 、 Q 移动的速度相同即可得出四边形 $BPDQ$ 是平行四边形, 如要四边形 $BPDQ$ 是菱形只需 $BP=DP$, 设经过 $x\text{s}$, 四边形 $BPDQ$ 是菱形, 用 x 表示出 BP 、 DP , 由此即可得出关于 x 的一元二次方程, 解方程即可得出结论;

(2) 由 $\angle PDQ \neq 90^\circ$ 可知 $\triangle DPQ$ 为直角三角形分两种情况. ①当 $\angle DPQ=90^\circ$ 时, 过点 Q 作 $QM \perp AB$ 于 M , 利用勾股定理即可得出关于 x 的一元二次方程, 解方程即可求出 x 值; ②当 $\angle DQP=90^\circ$ 时, 则 $AP+CQ=16$, 由此可得出关于 x 的一元一次方程, 解方程即可得出 x 值. 综上即可得出结论.

【解答】 解: (1) \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$.

\because 点 P 、 Q 均以 3cm/s 的速度移动,

$\therefore AP=CQ$,

$\therefore BP=DQ$,

\therefore 四边形 $BPDQ$ 是平行四边形,

\therefore 当 $BP=DP$ 时, 四边形 $BPDQ$ 是菱形.

设经过 $x\text{s}$, 四边形 $BPDQ$ 是菱形, 则有 $AP=3x\text{cm}$, $BP=(16-3x)\text{cm}$,

由勾股定理得: $DP^2=(3x)^2+6^2$,

$\therefore DP^2=(3x)^2+6^2=(16-3x)^2$,

解得: $x=\frac{55}{24}$.

答: 经过 $\frac{55}{24}\text{s}$ 时四边形 $BPDQ$ 是菱形.

(2) \because 点 P 不与点 A 重合,

$\therefore \angle PDQ \neq 90^\circ$,

$\therefore \triangle DPQ$ 为直角三角形分两种情况:

①当 $\angle DPQ = 90^\circ$ 时, $\triangle DPQ$ 为直角三角形, 过点 Q 作 $QM \perp AB$ 于 M , 易得四边形 $BCQM$ 为矩形, 如图所示.

$\therefore AP = 3x \text{ cm}$, $BM = CQ = 2x \text{ cm}$, 则 $PM = (16 - 5x) \text{ cm}$, $DQ = (16 - 2x) \text{ cm}$,

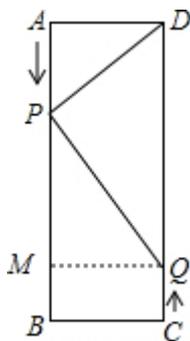
$\therefore (16 - 5x)^2 + 6^2 + (3x)^2 + 6^2 = (16 - 2x)^2$,

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{6}{5}$;

②当 $\angle DQP = 90^\circ$ 时, $AP + CQ = 16$,

所以 $3x + 2x = 16$, 解得: $x = \frac{16}{5}$.

综上所述: 经过 $2s$ 、 $\frac{6}{5}s$ 或 $\frac{16}{5}s$ 时, $\triangle DPQ$ 为直角三角形.



25. (10分) 某市在道路改造过程中, 需要铺设一条长为 1000 米的管道, 决定由甲、乙两个工程队来完成这一工程. 已知甲工程队比乙工程队每天能多铺设 20 米, 且甲工程队铺设 350 米所用的天数与乙工程队铺设 250 米所用的天数相同.

(1) 甲、乙工程队每天各能铺设多少米?

(2) 如果要求完成该项工程的工期不超过 10 天, 那么为两工程队分配工程量的方案有几种? 请你帮助设计出来 (工程队分配工程量为正整百数).

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (1) 设甲工程队每天能铺设 x 米. 根据甲工程队铺设 350 米所用的天数与乙工程队铺设 250 米所用的天数相同, 列方程求解;

(2) 设分配给甲工程队 y 米, 则分配给乙工程队 $(1000 - y)$ 米. 根据完成该项工程的工期不超过 10 天, 列不等式组进行分析.

【解答】 解: (1) 设甲工程队每天能铺设 x 米, 则乙工程队每天能铺设 $(x - 20)$ 米.

根据题意得: $\frac{350}{x} = \frac{250}{x-20}$,

即 $350(x - 20) = 250x$,

$\therefore 7x - 140 = 5x$

解得 $x = 70$.

经检验, $x = 70$ 是原分式方程的解, 且符合题意,

乙工程队每天能铺设: $x - 20 = 70 - 20 = 50$ 米.

答: 甲、乙工程队每天分别能铺设 70 米和 50 米.

(2) 设分配给甲工程队 y 米, 则分配给乙工程队 $(1000 - y)$ 米.

由题意, 得

$$\begin{cases} \frac{y}{70} \leq 10 \\ \frac{1000-y}{50} \leq 10 \end{cases},$$

解得 $500 \leq y \leq 700$.

所以分配方案有 3 种:

方案一: 分配给甲工程队 500 米, 分配给乙工程队 500 米;

方案二: 分配给甲工程队 600 米, 分配给乙工程队 400 米;

方案三: 分配给甲工程队 700 米, 分配给乙工程队 300 米.

26. (10 分)【阅读理解】对于任意正实数 a, b , $\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, $\therefore a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, $\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$,

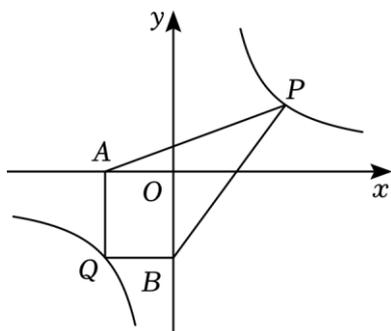
(只有当 $a = b$ 时, $a + b = 2\sqrt{ab}$).

【获得结论】在 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (a, b 均为正实数) 中, 若 ab 为定值 p , 则 $a + b \geq 2\sqrt{p}$, 只有当 $a = b$ 时, $a + b$ 有最小值 $2\sqrt{p}$.

【探索应用】根据上述内容, 回答下列问题:

(1) 若 $m > 0$, 只有当 $m = \underline{2}$ 时, $m + \frac{4}{m}$ 有最小值 $\underline{4}$;

(2) 已知点 $Q(-4, -5)$ 是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上点, 过 Q 作 $QA \perp x$ 轴于点 A , 作 $QB \perp y$ 轴于点 B . 点 P 为双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 上任意一点, 连接 PA, PB , 求四边形 $AQBP$ 的面积的最小值.



【答案】(1) 2, 4;

(2) 40.

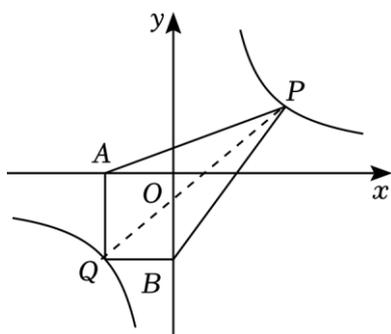
【分析】(1) 根据材料可得，当 $m = \frac{4}{m}$ 时， $m + \frac{4}{m}$ 取得最大值，据此即可求解；

(2) 连接 PQ ，设 $P(x, \frac{20}{x})$ ，根据四边形 $AQBP$ 的面积 = $\triangle AQP$ 的面积 + $\triangle QBP$ 的面积，从而利用 x 表示出四边形的面积，利用阅读材料中介绍的不等式的性质即可求解。

【解答】解：(1) 根据题意得当 $m = \frac{4}{m}$ 时， $m = 2$ ，此时 $m + \frac{4}{m} = 4$ 。

故答案为：2, 4;

(2) 连接 PQ ，



\because 点 $Q(-4, -5)$ 是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上的点，

$\therefore k = -4 \times (-5) = 20$ ，即 $y = \frac{20}{x}$ ，

设 $P(x, \frac{20}{x})$ ，

$\therefore S_{\text{四边形AQBP}} = S_{\triangle APQ} + S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} \times 5(x+4) + \frac{1}{2} \times 4(\frac{20}{x} + 5)$

$= \frac{5}{2}x + \frac{40}{x} + 20 \geq 2\sqrt{\frac{5}{2}x \times \frac{40}{x}} + 20 = 40$ 。

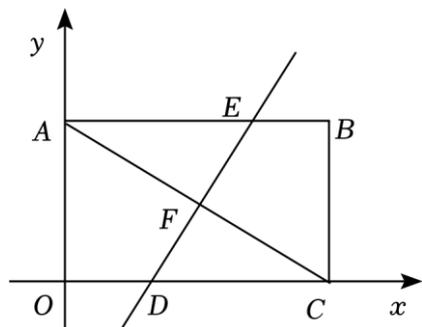
\therefore 四边形 $AQBP$ 的面积最小值为 40。

27. (12分) 如图，平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的对角线 $AC = 5$ ，边 $OA = 3$ 。

(1) 求 C 点的坐标；

(2) 把矩形 $OACB$ 沿直线 DE 对折使点 C 落在点 A 处，直线 DE 与 OC 、 AC 、 AB 的交点分别为 D 、 F 、 E ，求折痕 DE 的长；

(3) 在 (2) 的条件下，若点 M 在 x 轴上，平面内是否存在点 N ，使四边形 $FDMN$ 是菱形？若存在，请直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】 (1) $C(4, 0)$;

(2) $\frac{15}{4}$;

(3) 存在， $(\frac{11}{4}, 0)$ 或 $(-1, 0)$.

【分析】 (1) 由四边形 $AOCB$ 为矩形，得到 $\angle AOC$ 为直角，在直角三角形 AOC 中，利用勾股定理求出 OC 的长，即可确定出 C 的坐标；

(2) 连接 AD ，如图 1 所示，由折叠的性质设 $AD=DC=x$ ，由 $OC-CD$ 表示出 OD ，在直角三角形 AOD 中，利用勾股定理列出关于 x 的方程，求出方程的解得到 x 的值，确定出 AD 的长，由中心对称性质得到 F 为 ED 中点，在直角三角形 ADF 中，利用勾股定理求出 DF 的长，即可求出 DE 的长；

(3) 在 (2) 的条件下，若点 M 在 x 轴上，平面内存在点 N ，使四边形 $FDMN$ 是菱形，如图 2 所示，分两种情况考虑：当 M 与 N 在直线 DE 右边时；当 M' 与 N' 在直线 DE 左边时，分别利用菱形的四条边相等求出 M 的坐标即可。

【解答】 解：(1) \because 四边形 $AOCB$ 为矩形，

$\therefore \angle AOC=90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle AOC$ 中， $AC=5$ ， $OA=3$ ，

根据勾股定理得： $OC=\sqrt{AC^2-OA^2}=4$ ，

则 $C(4, 0)$ ；

(2) 连接 AD ，如图 1 所示，

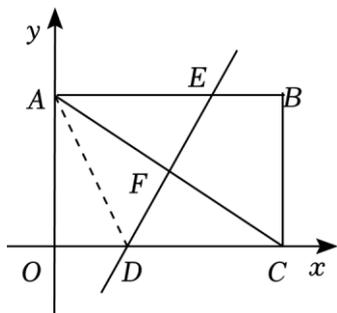


图1

由折叠的性质设 $AD=DC=x$ ，则 $OD=OC-CD=4-x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $OA=3$ ， $AD=x$ ， $OD=4-x$ ，

根据勾股定理得： $AD^2=OA^2+OD^2$ ，即 $x^2=3^2+(4-x)^2$ ，

$$\text{解得： } x=\frac{25}{8},$$

$$\therefore AD=\frac{25}{8}, OD=\frac{7}{8},$$

由中心对称性质得到 E 关于 D 对称，即 $EF=CF=\frac{1}{2}DE$ ，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADF \text{ 中，由勾股定理得： } DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{8},$$

$$\text{则 } DE=2DF=\frac{15}{4};$$

(3) 解：在 (2) 的条件下，若点 M 在 x 轴上，平面内存在点 N ，使四边形 $FDMN$ 是菱形，如图 2 所示，分两种情况考虑：

(i) 当 DM 为菱形的一边时，

①当 M 与 N 在直线 DE 右边时，

$$\therefore \text{四边形 } FDMN \text{ 是菱形， } DF=\frac{15}{8},$$

$$\therefore DM=DF=\frac{15}{8},$$

$$\therefore OM=OD+DM=\frac{7}{8}+\frac{15}{8}=\frac{11}{4}, \text{ 即 } M\left(\frac{11}{4}, 0\right);$$

②当 M' 与 N' 在直线 DE 左边时，

$$\text{同理得到 } DM'=DF=\frac{15}{8},$$

$$\therefore OM'=DM'-OD=1, \text{ 此时 } M(-1, 0);$$

综上，使四边形 $FDMN$ 是菱形时 M 的坐标为 $\left(\frac{11}{4}, 0\right)$ 或 $(-1, 0)$ 。

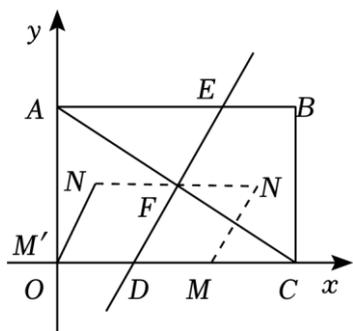


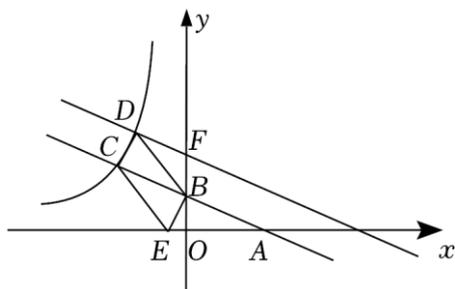
图2

28. (12分) 如图所示, 直线 $y = ax + b$ ($a < 0, b > 0$) 的图象与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 交于点 C , 且 B 为线段 AC 的中点, 向上平移直线 AB 与反比例函数的图象相交于点 D , 点 E 为 x 轴负半轴上一点, 四边形 $BDCE$ 为平行四边形.

(1) 若 $a = -\frac{1}{2}, b = 1$, 则点 C 的坐标为 $(-2, 2)$, 反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$;

(2) 在 (1) 的条件下, 求平移后的直线 DF 的函数表达式;

(3) 当平行四边形 $BDCE$ 的面积等于 30 时, 求 $\frac{b^2}{a}$ 的值.



【答案】 (1) $(-2, 2), y = \frac{4}{x}$;

(2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{3}$;

(3) $-\frac{45}{2}$.

【分析】 (1) 首先根据直线 AB 的解析式求出 A 和 B 的坐标, 再利用中点坐标公式可得点 C 的坐标, 从而求出反比例函数解析式;

(2) 过点 D 作 $DM \perp y$ 轴于点 M , 过点 C 作 $CN \perp x$ 轴于点 N , 利用 $\triangle DMB \cong \triangle ENC$ 可得点 D 的坐标, 再利用平移知, k 相同, 从而解决问题;

(3) 根据 $\square BDCE$ 的面积等于 30, 得 $\triangle ACE$ 的面积为 30, 由题意可得 $A(-\frac{b}{a}, 0), B(0, b), C(\frac{b}{a}, 2b)$, 再由 (2) 同理可得点 D 的坐标, 从而表示出 AE , 进而解决问题.

【解答】解：（1）当 $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$ 时, $y=-\frac{1}{2}x+1$,

当 $x=0$ 时, $y=1$, 当 $y=0$ 时, $x=2$,

$\therefore B(0, 1), A(2, 0)$,

$\therefore B$ 为线段 AC 的中点,

$\therefore C(-2, 2)$,

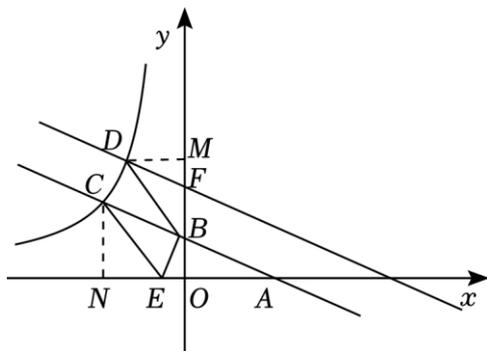
\therefore 反比例函数 $y=\frac{k}{x} (x < 0)$ 过点 C ,

$\therefore k = -2 \times 2 = -4$,

$\therefore y = -\frac{4}{x}$,

故答案为: $(-2, 2)$, $y = -\frac{4}{x}$;

（2）过点 D 作 $DM \perp y$ 轴于点 M , 过点 C 作 $CN \perp x$ 轴于点 N ,
则 $CN \parallel y$ 轴,



$\therefore \angle CBM = \angle BCN$,

在平行四边形 $BDCE$ 中,

$BD = CE, BD \parallel CE$,

$\therefore \angle DBC = \angle ECB$,

$\therefore \angle DBM = \angle ECN$, 又 $\angle BMD = \angle CNE = 90^\circ, BD = CE$,

$\therefore \triangle DMB \cong \triangle ENC$ (AAS),

$\therefore DM = EN, BM = CN$,

由（1）知, $C(-2, 2), y = -\frac{4}{x}$,

$\therefore BM = CN = 2$,

$\therefore b = 1$,

$\therefore OB = 1$,

$$\therefore OM=1+2=3, \text{ 把 } y=3 \text{ 代入 } y=-\frac{4}{x} \text{ 中, 得 } x=-\frac{4}{3},$$

$$\therefore D\left(-\frac{4}{3}, 3\right),$$

设直线 DF 为 $y=mx+n$,

\therefore 直线 DF 由直线 AC 平移得到,

$$\therefore m=-\frac{1}{2},$$

$$\text{将 } D\left(-\frac{4}{3}, 3\right) \text{ 代入 } y=-\frac{1}{2}x+n \text{ 中, 得 } 3=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)+n,$$

$$\therefore n=\frac{7}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } DF \text{ 的解析式为 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{3};$$

(3) $\therefore \square BDCE$ 的面积等于 30,

$\therefore \triangle BCE$ 的面积为 15,

\therefore 点 B 是 AC 的中点,

$\therefore \triangle ACE$ 的面积为 30,

$$\text{由 } y=ax+b \text{ 可得: } A\left(-\frac{b}{a}, 0\right), B(0, b),$$

$\therefore B$ 为线段 AC 的中点,

$$\therefore C\left(\frac{b}{a}, 2b\right),$$

$$\text{将 } C\left(\frac{b}{a}, 2b\right) \text{ 代入 } y=\frac{k}{x} \text{ 中, 得: } k=\frac{2b^2}{a},$$

同 (2) 可得 $BM=CN=2b$,

$$\therefore OM=b+2b=3b,$$

$$\text{把 } y=3b \text{ 代入 } y=\frac{2b^2}{ax} \text{ 中, 得: } x=\frac{2b}{3a},$$

$$\therefore D\left(\frac{2b}{3a}, 3b\right),$$

$$\therefore DM=EN=-\frac{2b}{3a},$$

$$\therefore AE=AN-EN=\frac{b}{a}-\frac{b}{a}-\left(-\frac{2b}{3a}\right)=-\frac{4b}{3a},$$

$\therefore \triangle ACE$ 的面积为 30,

$$\therefore \frac{1}{2}AE \cdot CN=30,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4b}{3a}\right) \times 2b = 30,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a} = -\frac{45}{2}.$$