

2022-2023 学年江苏省西安交大苏州附中高一（下）开学数学试卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

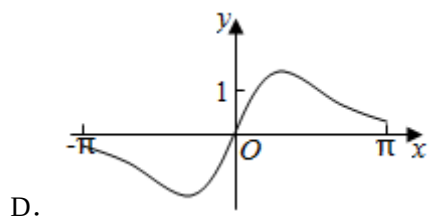
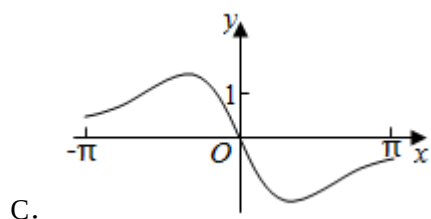
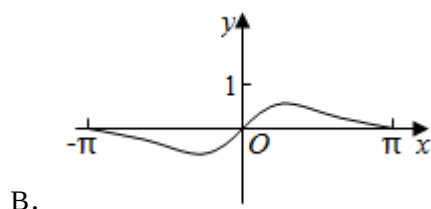
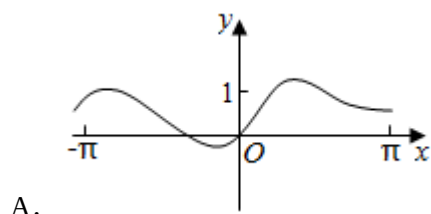
1. (5 分) 已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{-1, 3, 4\}$

2. (5 分) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $|a| > b$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. (5 分) 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 ()



4. (5 分) 苏格兰数学家纳皮尔发明了对数，在此基础上，布里格斯制作了第一个常用对数表，对数是简化大数运算的有效工具。若一个 36 位整数 a 的 31 次方根仍是一个整数 b , 根依据如表数据, 则 $b =$ ()

x	2	3	6	7	8	9	11	12	13
$\lg x$	0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

5. (5分) 已知 $a = \sin 2$, $b = \ln 2$, $c = 2^{-\frac{1}{3}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

6. (5分) 已知 $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时, 关于 x 的不等式 $(ax - 2)(x^2 + bx - 4) \geq 0$ 恒成立, 则 $b + \frac{4}{a}$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $2\sqrt{5}$ C. 4 D. $3\sqrt{2}$

7. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{3}x + 2, & x \geq 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = [f(x)]^2 - af(x) + 1$ 有 6 个零点,

则 a 的取值范围是 ()

- A. $(2, 4]$ B. $(2, +\infty)$ C. $(2, \frac{5}{2}]$ D. $[\frac{5}{2}, 4]$

8. (5分) 已知 α, β 满足 $\alpha e^\alpha = e^3$, $\beta(\ln \beta - 1) = e^4$, 其中 e 是自然对数的底数, 则 $\alpha\beta$ 的值为 ()

- A. e B. e^2 C. e^3 D. e^4

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对得 2 分.

(多选) 9. (5分) 若 $a < b < 0$, 则下列不等式恒成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$ B. $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$
C. $(a + \frac{1}{b})^2 > (b + \frac{1}{a})^2$ D. $(a + \frac{1}{a})^2 > (b + \frac{1}{b})^2$

(多选) 10. (5分) 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $a < b < c$, 且 $f(b) < f(c) < f(a)$, 则 ()

- A. $a < 1$ B. $b > 1$ C. $c > 1$ D. $ac > 1$

(多选) 11. (5分) 有限集合 S 中元素的个数记作 $\text{card}(S)$, 设 A, B 都为有限集合, 下列命题中是假命题的是 ()

- A. “ $A \cap B = \emptyset$ ” 的充要条件是 “ $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ ”
B. “ $A \subseteq B$ ” 的充要条件是 “ $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ ”
C. “ $A \subseteq B$ ” 的必要不充分条件是 “ $\text{card}(A) \leq \text{card}(B) - 1$ ”
D. “ $A = B$ ” 的充要条件是 “ $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ ”

(多选) 12. (5分) 已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$, 下列关于该函数结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
- B. $f(x)$ 的一个周期是 2π
- C. $f(x)$ 的最小值是 -2
- D. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 是减函数

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. (5 分) 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4)$ 的单调递增区间是 _____.

14. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 是定义为 $\mathbf{R}$ ，对于 $\forall x_1 < x_2$ ，有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ ，且 $f(1) = 1$ ，则不等式 $f(2^x - 1) < 2 - |2^x - 1|$ 的解集 _____.

15. (5 分) 集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有子集的元素和等于 _____.

16. (5 分) 已知 x, y, z 均为正数，则 $\frac{xy + 3yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) (1) 计算： $\log_2 3 \cdot \log_3 4 - 3 \times (\frac{1}{4})^{\lg 0.1 + \pi \cos(\frac{\pi}{2})}$.

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的终边与单位圆交于点 $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ，求

$\frac{\sin^2(-2\pi + \alpha) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\sin \alpha + \cos(\pi - \alpha) + 1 - \tan(3\pi + \alpha)}$ 的值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$)，其最小正周期与 $g(x) = |\cos x|$ 相同.

(1) 求 $f(x)$ 单调减区间和对称中心；

(2) 若方程 $f(x) - a = 0$ 在区间 $[0, \frac{7\pi}{6}]$ 上恰有三个实数根，分别为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$)，求 $\sin$

$(x_3 - x_2 - 2x_1)$ 的值.

19. (12 分) 已知函数 $g(x) = 4^x - m \cdot 2^x - 3$

(1) 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 -1 ，求实数 m 的值；

(2) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内存在实数 x 满足 $f(-x) = -f(x)$ ，则称函数 $f(x)$ 为“局部奇函数”，若函数 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的“局部奇函数”，求实数 m 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \lg \frac{x-1}{x+1}$.

(1) 判断并证明函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若存在 $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的值域为 $[\lg(m\alpha - \frac{m}{3}), \lg(m\beta - \frac{m}{3})]$,

求实数 m 的取值范围.

21. (12 分) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 最小值为 0, 且关于 $x = -1$ 对称, 当 $x \in (0, 5)$ 时, $x \leq f(x) \leq 2|x-1|+1$ 恒成立.

(1) 求 $f(3)$ 的值;

(2) 若存在 $t \in \mathbf{R}$, 只要当 $x \in [1, m]$ 时, 就有 $f(x+t) \leq x$ 成立, 求实数 m ($m > 1$) 的最大值.

22. (12 分) 已知函数 $h(x) = \frac{mx+n}{3x^2+27}$ 为奇函数, $k(x) = (\frac{1}{3})^{|x-m|}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $h(x)$ 的图象过点 $A(1, 1)$, 求实数 m 和 n 的值;

(2) 若 $m=3$, 试判断函数 $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{1}{k(x)}$ 在 $x \in [3, +\infty)$ 上的单调性并证明;

(3) 设函数 $g(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 3 \\ 9k(x), & x < 3 \end{cases}$ 若对每一个不小于 3 的实数 x_1 , 都恰有一个小于 3 的实数 x_2 ,

使得 $g(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

2022-2023 学年江苏省西安交大苏州附中高一（下）开学数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.（5 分）已知集合 $A = \{x | |x - 1| \geq 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{-1, 3, 4\}$

【答案】D

【分析】解不等式得到集合 A，然后求交集即可．

【解答】解：由题意得 $A = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\}$ ，

所以 $A \cap B = \{-1, 3, 4\}$ ．

故选：D．

2.（5 分）已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > b$ ”是“ $|a| > b$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】根据不等式的关系进行判断即可．

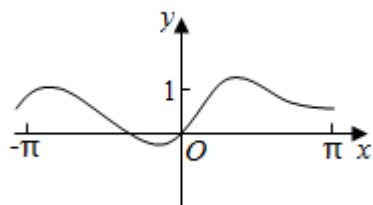
【解答】解：当 $a > b$ 时，若 $b < 0$ ，则 $|a| > b$ 成立，

若 $b \geq 0$ ，则 $a > b \geq 0$ ，则 $|a| = a > b$ 成立，即充分性成立，

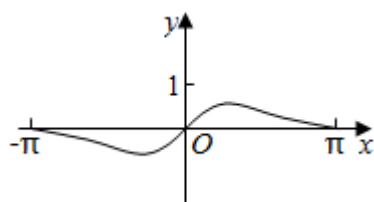
当 $a = -2$ ， $b = 1$ 时，满足 $|a| > b$ ，但 $a > b$ 不成立，即必要性不成立，

故选：A．

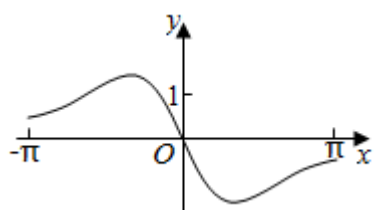
3.（5 分）函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为（ ）



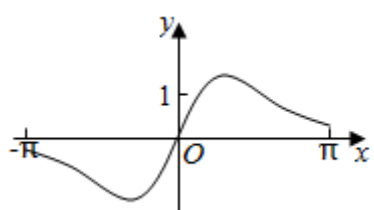
A.



B.



C.



D.

【答案】 D

【分析】 由 $f(x)$ 的解析式知 $f(x)$ 为奇函数可排除 A，然后计算 $f(\pi)$ ，判断正负即可排除 B，C.

【解答】 解： $\because f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}, x \in [-\pi, \pi]$,

$$\therefore f(-x) = \frac{-\sin x - x}{\cos(-x) + x^2} = -\frac{\sin x + x}{\cos x + x^2} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数，因此排除 A；

又 $f(\pi) = \frac{\sin \pi + \pi}{\cos \pi + \pi^2} = \frac{\pi}{-1 + \pi^2} > 0$ ，因此排除 B，C；

故选：D.

4. (5 分) 苏格兰数学家纳皮尔发明了对数，在此基础上，布里格斯制作了第一个常用对数表，对数是简化大数运算的有效工具. 若一个 36 位整数 a 的 31 次方根仍是一个整数 b ，根依据如表数据，则 $b = (\quad)$

x	2	3	6	7	8	9	11	12	13
$\lg x$	0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11

A. 13

B. 14

C. 15

D. 16

【答案】 B

【分析】 由已知可得 $\sqrt[31]{a} = b$ ，然后结合指数与对数的转化公式及对数运算性质即可求解.

【解答】 解：由题意得， $\sqrt[31]{a} = b$ ，

$$\text{所以 } \frac{\lg a}{31} = \lg b,$$

$$\text{因为 } 10^{35} \leq a < 10^{36},$$

$$\text{所以 } 35 \leq \lg a < 36,$$

$$\text{所以 } \lg b \in \left[\frac{35}{31}, \frac{36}{31} \right),$$

$$\text{则 } 1.13 \leq \lg b < 1.16,$$

$$\text{因为 } \lg 14 = \lg 2 + \lg 7 = 0.30 + 0.85 = 1.15, \lg 13 = 1.11,$$

$$\text{故 } b = 14.$$

故选：B.

5. (5分) 已知 $a = \sin 2$, $b = \ln 2$, $c = 2^{-\frac{1}{3}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

【答案】D

【分析】判断 $\sin 2$ 与 $\sin \frac{2\pi}{3}$ 的大小, 比较 a 与 $\frac{3}{4}$ 、 b 与 $\frac{3}{4}$ 、 c 与 $\frac{3}{4}$ 的大小可判断 a 与 b 的大小关系及 b 与 c 的大小关系, 判断 a 与 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 c 与 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的大小关系可以判断 a 与 c 大小关系, 从而得到 a, b, c 的大小关系.

【解答】解: $a = \sin 2 > \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{3}{4}$, $(\frac{3}{4})^4 = e^3 > 2^4$,

$$\therefore \frac{3}{4} > 2, \therefore \ln e^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} > \ln 2, \therefore b < \frac{3}{4}, \therefore a > b,$$

$$\therefore (2^{-\frac{1}{3}})^3 = \frac{1}{2} = \frac{32}{64}, (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}, \therefore 2^{-\frac{1}{3}} > \frac{3}{4}, \therefore c > b,$$

$$\therefore (\frac{\sqrt{3}}{2})^6 = \frac{27}{64}, (2^{-\frac{1}{3}})^6 = \frac{1}{4} = \frac{16}{64}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} > 2^{-\frac{1}{3}}, \therefore a > c.$$

综上, $b < c < a$.

故选：D.

6. (5分) 已知 $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时, 关于 x 的不等式 $(ax - 2)(x^2 + bx - 4) \geq 0$ 恒成立, 则 $b + \frac{4}{a}$ 的最小值为 ()

A. 2

B. $2\sqrt{5}$

C. 4

D. $3\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】根据题意设 $y=ax-2$, $y=x^2+bx-4$, 由一次函数以及不等式 $(ax-2)(x^2+bx-4) \geq 0$ 分析得 $x=\frac{2}{a}$ 时, $y=x^2+bx-4=0$, 变形后代入 $b+\frac{4}{a}$, 然后利用基本不等式求解.

【解答】解: 设 $y=ax-2$ ($x>0$), $y=x^2+bx-4$ ($x>0$),

因为 $a>0$, 所以当 $0 < x < \frac{2}{a}$ 时, $y=ax-2 < 0$;

当 $x=\frac{2}{a}$ 时, $y=ax-2=0$;

当 $x > \frac{2}{a}$ 时, $y=ax-2 > 0$;

由不等式 $(ax-2)(x^2+bx-4) \geq 0$ 恒成立, 得 $\begin{cases} ax-2 \leq 0 \\ x^2+bx-4 \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} ax-2 \geq 0 \\ x^2+bx-4 \geq 0 \end{cases}$,

即当 $0 < x \leq \frac{2}{a}$ 时, $x^2+bx-4 \leq 0$ 恒成立,

当 $x \geq \frac{2}{a}$ 时, $x^2+bx-4 \geq 0$ 恒成立,

所以当 $x=\frac{2}{a}$ 时, $y=x^2+bx-4=0$,

则 $\frac{4}{a^2} + \frac{2b}{a} - 4 = 0$, 即 $b = 2a - \frac{2}{a}$,

则当 $a>0$ 时, $b+\frac{4}{a} = 2a - \frac{2}{a} + \frac{4}{a} = 2a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2a \times \frac{2}{a}} = 4$, 当且仅当 $2a = \frac{2}{a}$, 即 $a=1$ 时等号成立,

故 $b+\frac{4}{a}$ 的最小值为 4.

故选: C.

7. (5 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{3}x + 2, & x \geq 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = [f(x)]^2 - af(x) + 1$ 有 6 个零点,

则 a 的取值范围是 ()

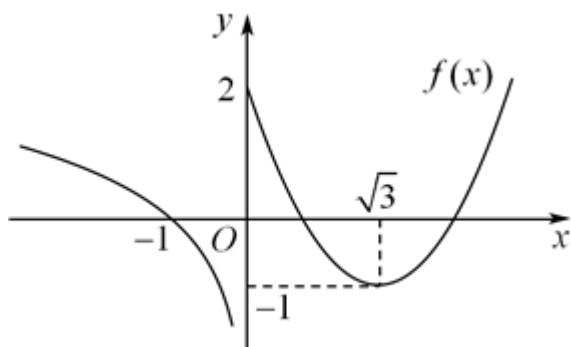
- A. $(2, 4]$ B. $(2, +\infty)$ C. $(2, \frac{5}{2}]$ D. $[\frac{5}{2}, 4]$

【答案】C

【分析】作出函数 $f(x)$ 的图象, 根据 t 的范围判断 $t=f(x)$ 的解的情况, 将 $g(x) = [f(x)]^2 - af(x) + 1$ 有 6 个零点, 转化为 $t^2 - at + 1 = 0$ 在 $(-1, 2]$ 内有两个根的问题, 列出不等式组, 求得答案.

【解答】解: 设 $t=f(x)$, 则由 $g(x) = [f(x)]^2 - af(x) + 1$, 可设 $y=h(t) = t^2 - at + 1$,

画出 $f(x)$ 图象, 如图所示,



由图可知当 $t < -1$ 时, $t = f(x)$ 有且仅有 1 解;

当 $t = -1$ 或 $t > 2$ 时, $t = f(x)$ 有 2 解;

当 $-1 < t \leq 2$ 时, $t = f(x)$ 有 3 解,

令 $h(t) = 0$, 即 $t^2 - at + 1 = 0$, 因为函数 $g(x)$ 有 6 个零点,

故需 $t^2 - at + 1 = 0$ 在 $(-1, 2]$ 内有两个根,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 > 0 \\ h(-1) = 1 + a + 1 > 0 \\ h(2) = 4 - 2a + 1 \geq 0 \\ -1 < \frac{a}{2} < 2 \end{cases}, \text{ 解得 } 2 < a \leq \frac{5}{2},$$

即 a 的取值范围是 $(2, \frac{5}{2}]$.

故选: C.

8. (5 分) 已知 α, β 满足 $\alpha e^\alpha = e^3$, $\beta (\ln \beta - 1) = e^4$, 其中 e 是自然对数的底数, 则 $\alpha \beta$ 的值为 ()

- A. e B. e^2 C. e^3 D. e^4

【答案】 D

【分析】 首先对函数的关系式进行变换, 进一步求出关系式的方程的具体的形式的根, 进一步求出结果.

【解答】 解: 实数 α, β 满足 $\alpha e^\alpha = e^3$, $\beta (\ln \beta - 1) = e^4$

所以 $\alpha + \ln \alpha = 3$, $\ln \beta + \ln (\ln \beta - 1) = 4$,

即 $\alpha + \ln \alpha - 3 = 0$, $\ln \beta - 1 + \ln (\ln \beta - 1) - 3 = 0$,

所以 α 和 $\ln \beta - 1$ 是方程 $x + \ln x - 3 = 0$ 的根,

由于方程 $x + \ln x - 3 = 0$ 的根唯一.

所以 $\alpha = \ln \beta - 1$, $3 - \ln \alpha = \ln \beta - 1$, 整理得 $\ln \alpha + \ln \beta = 4$,

所以 $\alpha \beta = e^4$.

故选：D.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对得 2 分．

（多选）9.（5 分）若 $a < b < 0$ ，则下列不等式恒成立的是（ ）

A. $\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$

B. $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$

C. $(a+\frac{1}{b})^2 > (b+\frac{1}{a})^2$

D. $(a+\frac{1}{a})^2 > (b+\frac{1}{b})^2$

【答案】AC

【分析】由不等式的基本性质逐一判断即可．

【解答】解：对于 A，因为 $a < b < 0$ ，所以 $0 > a - b > a$ ，所以 $\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$ ，故 A 正确；

对于 B，因为 $a < b < 0$ ，则 $|a| > |b| > 0$ ，所以 $\frac{1}{|a|} < \frac{1}{|b|}$ ，故 B 错误；

对于 C，因为 $a < b < 0$ ，所以 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ ，所以 $a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a} < 0$ ，所以 $(a + \frac{1}{b})^2 > (b + \frac{1}{a})^2$ ，故 C 正确；

对于 D，取特殊值 $a = -\frac{1}{2}$ ， $b = -\frac{1}{3}$ ，则有 $(a + \frac{1}{a})^2 < (b + \frac{1}{b})^2$ ，故 D 错误．

故选：AC.

（多选）10.（5 分）已知函数 $f(x) = |\lg x|$ ，若 $a < b < c$ ，且 $f(b) < f(c) < f(a)$ ，则（ ）

A. $a < 1$

B. $b > 1$

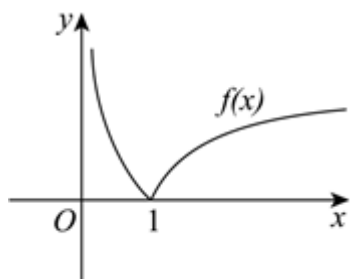
C. $c > 1$

D. $ac > 1$

【答案】AC

【分析】作出函数 $f(x) = |\lg x|$ 的图象，根据题意分类讨论，可确定 a, b, c 的范围，可判断 A, B, C，由 $f(a) > f(c)$ ，利用对数的运算可得 $\lg ac < 0$ ，可判断 D.

【解答】解：由题意得 $f(x) = |\lg x| = \begin{cases} -\lg x, & 0 < x < 1 \\ \lg x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，作出其图象如图：



∴在 $(0, 1)$ 上，函数是减函数；在 $(1, +\infty)$ 上，函数是增函数，

∵ $a < b < c$ ，∴若 $c \leq 1$ ，则 $f(a) > f(b) > f(c)$ ，不合题意，∴ $c > 1$ ，C 正确；

若 $a \geq 1$ ，则 $f(a) < f(b) < f(c)$ ，也不合题意，∴ $0 < a < 1$ ，A 正确；

结合图象可知 b 可大于 1，可小于 1 或等于 1， B 错误；

由 $f(a) > f(c)$ ，可得 $-lga > lgc$ ， $\therefore lga + lgc < 0$ ， $\therefore lgac < 0$ ，

故 $0 < ac < 1$ ， D 错误。

故选：AC。

（多选）11.（5 分）有限集合 S 中元素的个数记作 $card(S)$ ，设 A, B 都为有限集合，下列命题中是假命题的是（ ）

A. “ $A \cap B = \emptyset$ ”的充要条件是 “ $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$ ”

B. “ $A \subseteq B$ ”的充要条件是 “ $card(A) \leq card(B)$ ”

C. “ $A \subseteq B$ ”的必要不充分条件是 “ $card(A) \leq card(B) - 1$ ”

D. “ $A = B$ ”的充要条件是 “ $card(A) = card(B)$ ”

【答案】BCD

【分析】根据充要条件的定义，集合的性质，判断即可。

【解答】解：对于 A， $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 没有公共元素， $\therefore A$ 正确，

对于 BD，根据集合中元素个数并不能判断 $A \subseteq B$ 或 $A = B$ 成立， $\therefore BD$ 错误，

对于 C，当 $A = B$ 时，满足 $A \subseteq B$ ，此时 $card(A) = card(B)$ ， $\therefore card(A) \leq card(B) - 1$ 不成立， $\therefore C$ 错误。

故选：BCD。

（多选）12.（5 分）已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ ，下列关于该函数结论正确的是（ ）

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

B. $f(x)$ 的一个周期是 2π

C. $f(x)$ 的最小值是 -2

D. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 是减函数

【答案】BD

【分析】直接利用三角函数的值，函数的性质的应用，判断 A、B、C、D 的结论。

【解答】解：对于 A 选项： $f(0) = \sin 1 + \cos 0 = 1 + \sin 1$ ， $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\cos \frac{\pi}{2}) + \cos(\sin \frac{\pi}{2}) = \cos 1$ ，

故 A 错误；

对于 B 选项： $f(x + 2\pi) = f(x)$ ，故 B 正确；

对于 C 选项：若 $f(x) = -2$ 成立，则需满足 $\sin(\cos x) = -1$ 且 $\cos(\sin x) = -1$ ，显然没有满足条件的 x 存在，故 C 错误；

对于 D 选项：由复合函数的单调性判断，故 D 正确。

故选：BD。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. (5 分) 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$ 。

【答案】 $(-\infty, 1)$ 。

【分析】求出原函数的定义域，再求出内层二次函数的减区间，结合复合函数的单调性得答案。

【解答】解：由 $x^2 - 5x + 4 > 0$ ，得 $x < 1$ 或 $x > 4$ 。

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4)$ 的应用为 $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$ 。

令 $t = x^2 - 5x + 4$ ，该函数在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数，

而函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 为应用内的减函数，

则函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$ 。

故答案为： $(-\infty, 1)$ 。

14. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 是定义为 $\mathbf{R}$ ，对于 $\forall x_1 < x_2$ ，有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ ，且 $f(1) = 1$ ，则不等

式 $f(2^x - 1) < 2 - |2^x - 1|$ 的解集 $\{x | x < 1\}$ 。

【答案】 $\{x | x < 1\}$ 。

【分析】由已知不等式可得 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$ ，令 $g(x) = f(x) + x$ ，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，结合 $g(x)$ 的单调性即可求解不等式。

【解答】解：因为函数 $f(x)$ 是定义为 $\mathbf{R}$ ，对于 $\forall x_1 < x_2$ ，有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$ ，

所以 $f(x_1) - f(x_2) < -x_1 + x_2$ ，

所以 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$ ，

令 $g(x) = f(x) + x$ ，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

因为 $f(1) = 1$ ，

所以 $g(1) = 2$ ，

则不等式 $f(2^x - 1) < 2 - |2^x - 1|$ 可化为 $f(2^x - 1) + |2^x - 1| < 2$ ，

即 $g(|2^x - 1|) < g(1)$,

所以 $|2^x - 1| < 1$,

解得 $x < 1$.

故答案为: $\{x|x < 1\}$.

15. (5分) 集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有子集的元素和等于 672.

【答案】672.

【分析】根据集合 M 的子集的情形, 确定含有元素 1, 2, 3, 4, 5, 6 的子集的个数, 从而求得答案.

【解答】解: 集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集有以下情形:

空集 $\emptyset$;

含有元素 1 的子集有 $2^5 = 32$ 个;

含有元素 2 的子集有 $2^5 = 32$ 个;

含有元素 3 的子集有 $2^5 = 32$ 个;

含有元素 4 的子集有 $2^5 = 32$ 个;

含有元素 5 的子集有 $2^5 = 32$ 个;

含有元素 6 的子集有 $2^5 = 32$ 个,

所有子集的元素和为 $32 \times (1+2+3+4+5+6) = 672$.

故答案为: 672.

16. (5分) 已知 x, y, z 均为正数, 则 $\frac{xy+3yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】可设 $x^2+y^2+z^2 = x^2+ky^2+my^2+z^2 \geq 2\sqrt{k}xy+2\sqrt{m}yz$, ($x, y, z > 0$), 由题意可得 k, m , 即可得到所求最大值.

【解答】解: x, y, z 均为正数,

可设 $x^2+y^2+z^2 = x^2+ky^2+my^2+z^2 \geq 2\sqrt{k}xy+2\sqrt{m}yz$,

可得 $k+m=1$, 且 $k, m > 0$, $\sqrt{k} : \sqrt{m} = 1 : 3$,

解得 $k = \frac{1}{10}$, $m = \frac{9}{10}$,

则 $\frac{xy+3yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{xy+3yz}{(x^2+\frac{1}{10}y^2)+(\frac{9}{10}y^2+z^2)} \leq \frac{xy+3yz}{\frac{2}{\sqrt{10}}xy+\frac{6}{\sqrt{10}}yz} = \frac{\sqrt{10}}{2}$,

当且仅当 $x = \frac{y}{\sqrt{10}}$, $\frac{3y}{\sqrt{10}} = z$ 时取得等号,

则 $\frac{xy+3yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) (1) 计算: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\lg 0.1 + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, 求

$\frac{\sin^2(-2\pi + \alpha)}{\sin \alpha + \cos(\pi - \alpha)} + \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{1 - \tan(3\pi + \alpha)}$ 的值.

【答案】(1) -9; (2) $\frac{1}{5}$.

【分析】(1) 利用对数的运算性质化简即可求解; (2) 利用三角函数的定义求出 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 的值, 然后利用诱导公式化简所求的关系式, 进而可以求解.

【解答】解: (1) 原式 $= \log_2 3 \times 2 \log_3 2 - 3 \times 4 + 1 = -9$;

(2) 由已知可得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{\sin^2(-2\pi + \alpha)}{\sin \alpha + \cos(\pi - \alpha)} + \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{1 - \tan(3\pi + \alpha)} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \tan \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

故所求的关系式的值为 $\frac{1}{5}$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 其最小正周期与 $g(x) = |\cos x|$ 相同.

(1) 求 $f(x)$ 单调减区间和对称中心;

(2) 若方程 $f(x) - a = 0$ 在区间 $[0, \frac{7\pi}{6}]$ 上恰有三个实数根, 分别为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 求 $\sin$

$(x_3 - x_2 - 2x_1)$ 的值.

【答案】(1) 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$), 对称中心为

$(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$);

(2) $\sin(x_3 - x_2 - 2x_1) = \frac{1}{2}$.

【分析】(1) 由函数的周期求得 ω , 结合正弦函数的性质, 用整体代换法求得单调减区间和对称中心;

(2) 求得 $t=2x-\frac{\pi}{3}$ 的范围, 由正弦函数性质得 $\sin t=a$ 的解满足的性质: $t_1+t_2=\pi$, $t_3=t_1+2\pi$, 然后转化为 x_1, x_2, x_3 的关系, 再计算函数值.

【解答】解: (1) $\because g(x)$ 的最小正周期为 π ,

$$\therefore \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi (\omega > 0),$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ 得 } \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{由 } 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \text{ 得 } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$$

综上, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$, 对称中心为

$$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbb{Z});$$

$$(2) \text{ 由 } x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \text{ 得 } -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi,$$

设 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, 则 $\sin t = a$ 有三个实根 t_1, t_2, t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$),

由正弦函数的性质可得 $t_1 + t_2 = \pi$, $t_3 = t_1 + 2\pi$,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = x_1 + \pi,$$

$$\therefore \sin(x_3 - x_2 - 2x_1) = \sin[(x_3 - x_1) - (x_1 + x_2)] = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

19. (12分) 已知函数 $g(x) = 4^x - m \cdot 2^x - 3$

(1) 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 -1 , 求实数 m 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内存在实数 x 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为“局部奇函数”, 若函数 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的“局部奇函数”, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $m = -1$; (2) $\{m | m \geq -2\}$.

【分析】(1) 令 $t = 2^x$, 由 x 的范围求出 t 的范围, 然后结合二次函数的性质即可求解;

(2) 由题意得, $\exists x \in \mathbf{R}$ 满足 $4^x - m \cdot 2^x - 3 = -4^{-x} + m \cdot 2^{-x} + 3$, 令 $t = 2^x \in (0, +\infty)$, $p = t + \frac{1}{t} \in [2, +\infty)$,

代入到已知等式, 结合函数单调性即可求解.

【解答】解: (1) 令 $t = 2^x$,

由 $0 \leq x \leq 1$ 可得, $1 \leq t \leq 2$,

原函数可化为 $h(t) = t^2 - mt - 3$ ，为开口向上，对称轴 $t = \frac{m}{2}$ ，

当 $\frac{m}{2} \geq 2$ ，即 $m \geq 4$ 时， $h(t)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减，

则 $t=2$ 时，函数取得最小值 $1 - 2m = -1$ ，即 $m=1$ （舍），

当 $\frac{m}{2} \leq 1$ ，即 $m \leq 2$ 时， $h(t)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，

则 $t=1$ 时，函数取得最小值 $-2 - m = -1$ ，即 $m = -1$ ，

当 $1 < \frac{m}{2} < 2$ ，即 $2 < m < 4$ 时， $h(t)$ 在 $[1, 2]$ 上先减后增，

则 $t = \frac{m}{2}$ 时，函数取得最小值 $-3 - \frac{m^2}{4} = -1$ ，此时 m 不存在，

故 $m = -1$ ；

（2）由题意得， $\exists x \in \mathbf{R}$ 满足 $4^x - m \cdot 2^x - 3 = -4^{-x} + m \cdot 2^{-x} + 3$ ，

即 $m(2^x + 2^{-x}) = 4^x + 4^{-x} - 6$ ，

令 $t = 2^x \in (0, +\infty)$ ，则存在 $t \in (0, +\infty)$ 满足 $m(t + \frac{1}{t}) = t^2 + \frac{1}{t^2} - 6 = (t + \frac{1}{t})^2 - 8$ ，

令 $p = t + \frac{1}{t} \in [2, +\infty)$ ，则 $\exists p \in [2, +\infty)$ 满足 $mp = p^2 - 8$ ，即 $m = p - \frac{8}{p}$ ，

因为函数 $y = p - \frac{8}{p}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增，当 $p=2$ 时， $y_{\max} = -2$ ，

所以 $m \geq -2$ ，

故 m 的范围为 $\{m | m \geq -2\}$ 。

20.（12分）已知函数 $f(x) = \lg \frac{x-1}{x+1}$ 。

（1）判断并证明函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性；

（2）若存在 $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ ，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的值域为 $[\lg(m\alpha - \frac{m}{3}), \lg(m\beta - \frac{m}{3})]$ ，

求实数 m 的取值范围。

【答案】（1）证明见解析；

（2） m 的范围为 $(0, \frac{2}{9})$ 。

【分析】（1）任取 $1 < x_1 < x_2$ ，然后利用作差法比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小即可判断，

（2）结合（1）的单调性及已知函数的值域转化 $m > 0$ ，且 $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = m\alpha - 1$ 且 $\frac{\beta-1}{\beta+1} = m\beta - \frac{1}{2}$ ，从而 α ，

β 是方程 $\frac{x-1}{x+1} = mx - \frac{1}{2}$ 的实根，然后构造函数，结合二次函数的实根分布可求。

【解答】证明：（1）由于 $f(x) = \lg \frac{x-1}{x+1}$ 。

定义域 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

$$\text{任取 } 1 < x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \lg \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} - \lg \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} = \lg \frac{(x_1 - 1)(x_2 + 1)}{(x_2 - 1)(x_1 + 1)},$$

$$\because 1 < x_1 < x_2,$$

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 + 1) - (x_1 + 1)(x_2 - 1) = 2(x_1 - x_2) < 0,$$

$$(1 + x_1)(x_2 - 1) > 0,$$

$$0 < \frac{(x_1 - 1)(x_2 + 1)}{(x_2 - 1)(x_1 + 1)} < 1,$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \lg \frac{(x_1 - 1)(x_2 + 1)}{(x_2 - 1)(x_1 + 1)} < 0,$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调递增,

解: (2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调递增,

$$\therefore f(x) \text{ 在区间 } [\alpha, \beta] \text{ 上的值域为 } [\lg(\alpha - \frac{m}{3}), \lg(\beta - \frac{m}{3})],$$

$$\therefore m > 0, \text{ 且 } \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \alpha - \frac{m}{3}, \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \beta - \frac{m}{3},$$

$$\text{即 } \alpha, \beta \text{ 是方程 } \frac{x-1}{x+1} = mx - \frac{1}{3}m \text{ 的实根,}$$

问题等价于 $mx^2 - (1 - \frac{1}{2}m)x + 1 - \frac{1}{2}m = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不同实根,

$$\text{令 } h(x) = mx^2 - (1 - \frac{1}{2}m)x + 1 - \frac{1}{2}m, x \in (1, +\infty),$$

显然 $m \neq 0$,

$$\text{则 } \begin{cases} m > 0 \\ \frac{1}{2m} - \frac{1}{4} > 1 \\ h(1) = m > 0 \\ \Delta = (1 - \frac{1}{2}m)^2 - 4m(1 - \frac{1}{2}m) > 0 \end{cases}, \text{ 整理得: } \begin{cases} m > 0 \\ \frac{1}{2m} > \frac{5}{4} \\ h(1) = m > 0 \\ \Delta = (1 - \frac{1}{2}m)^2 - 4m(1 - \frac{1}{2}m) > 0 \end{cases} \quad \text{即}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ 0 < m < \frac{2}{5} \\ m > 2 \text{ 或 } m < \frac{2}{9} \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < m < \frac{2}{9},$$

故 m 的范围为 $(0, \frac{2}{9})$.

21. (12 分) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 最小值为 0, 且关于 $x = -1$ 对称, 当 $x \in (0, 5)$ 时, $x \leq f(x) \leq 2|x - 1| + 1$ 恒成立.

(1) 求 $f(3)$ 的值;

(2) 若存在 $t \in \mathbf{R}$, 只要当 $x \in [1, m]$ 时, 就有 $f(x+t) \leq x$ 成立, 求实数 m ($m > 1$) 的最大值.

【答案】 (1) $f(3) = 4$;

(2) 9.

【分析】 (1) 根据最值以及含绝对值的不等式恒成立求出 $f(1) = 1$, 再求出解析式, 最后得到 $f(3)$ 的值.

(2) 代入得到一元二次不等式, 求解出关于 t 与 m 的范围, 最后求解出 m 的最大值.

【解答】 解: (1) 由题意可设 $f(x) = a(x+1)^2$, 令 $x = 2|x - 1| + 1$, 得 $x = 1$,

$\therefore x \leq f(x) \leq 2|x - 1| + 1$ 对 $x \in (0, 5)$ 恒成立,

$\therefore 1 \leq f(1) \leq 1$, 即 $f(1) = 1$, 代入得 $4a = 1$,

$$\therefore a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2,$$

$$\therefore f(3) = 4;$$

(2) $\because$ 当 $x \in [1, m]$ 时, $f(x+t) \leq x$ 成立.

$\therefore$ 当 $x \in [1, m]$ 时, $(x+t+1)^2 \leq 4x$ 成立.

即 $x^2 + (2t - 2)x + t^2 + 2t + 1 \leq 0$ 成立,

令 $g(x) = x^2 + (2t - 2)x + t^2 + 2t + 1$,

令 $\phi(t) = 1 - t + 2\sqrt{-t}$, 易得此函数在 $-4 \leq t \leq 0$ 时为单调减函数,

$$\therefore m \leq \phi(t)_{\max},$$

$$\therefore m \leq 1 - t + 2\sqrt{-t} \leq 1 - (-4) + 2\sqrt{-(-4)} = 9,$$

即实数 m 的最大值为 9.

22. (12 分) 已知函数 $h(x) = \frac{mx+n}{3x^2+27}$ 为奇函数, $k(x) = (\frac{1}{3})^{|x-m|}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $h(x)$ 的图象过点 $A(1, 1)$, 求实数 m 和 n 的值;

(2) 若 $m = 3$, 试判断函数 $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{1}{k(x)}$ 在 $x \in [3, +\infty)$ 上的单调性并证明;

(3) 设函数 $g(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 3 \\ 9k(x), & x < 3 \end{cases}$ 若对每一个不小于 3 的实数 x_1 , 都恰有一个小于 3 的实数 x_2 ,

使得 $g(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】见试题解答内容

【分析】(1) 运用奇函数的定义可得 $n=0$, 再由 $h(x)$ 图象经过点 $(1, 1)$, 解方程可得 m ;

(2) $f(x) = x + \frac{9}{x} + 3^{x-3}$ 在 $[3, +\infty)$ 递增. 运用单调性的定义, 结合因式分解和指数函数的单调性,

即可得证;

(3) 求得当 $x \geq 3$ 时, $g(x) = h(x) = \frac{mx}{3x^2+27} = \frac{m}{3x+\frac{27}{x}}$; 当 $x < 3$ 时, $g(x) = 9k(x) = 9 \cdot (\frac{1}{3})^{|x-m|}$.

分别讨论 $m \leq 0$, $0 < m < 3$, $m \geq 3$, 运用基本不等式和单调性, 求得 m 的范围.

【解答】解: (1) 函数 $h(x) = \frac{mx+n}{3x^2+27}$ 为奇函数,

可得 $h(-x) = -h(x)$, 即 $\frac{-mx+n}{3x^2+27} = -\frac{mx+n}{3x^2+27}$, 则 $n=0$,

由 $h(x)$ 的图象过 $A(1, 1)$, 可得 $h(1) = 1$, 即 $\frac{m+n}{30} = 1$,

解得 $m=30$, $n=0$;

(2) $m=3$, 可得 $f(x) = x + \frac{9}{x} + 3^{x-3}$, $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 递增.

理由: 设 $3 \leq x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{9}{x_1} + 3^{x_1-3} - x_2 - \frac{9}{x_2} - 3^{x_2-3}$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \frac{9 - x_1 x_2}{x_1 x_2} + 3^{x_1-3} - 3^{x_2-3},$$

由 $3 \leq x_1 < x_2$, 可得 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 9$, $3^{x_1-3} - 3^{x_2-3} < 0$,

则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

可得 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 递增;

(3) 当 $x \geq 3$ 时, $g(x) = h(x) = \frac{mx}{3x^2+27} = \frac{m}{3x+\frac{27}{x}}$;

当 $x < 3$ 时, $g(x) = 9k(x) = 9 \cdot (\frac{1}{3})^{|x-m|}$.

① $m \leq 0$ 时, $\forall x_1 \geq 3$ 时, $g(x_1) = h(x_1) = \frac{m}{3x_1+\frac{27}{x_1}} \leq 0$;

$\forall x_2 < 3$ 时, $g(x_2) = 9k(x_2) = 9 \cdot (\frac{1}{3})^{|x_2-m|} > 0$ 不满足条件, 舍去;

②当 $0 < m < 3$ 时, $\forall x_1 \geq 3$ 时, $g(x_1) = h(x_1) = \frac{m}{3x_1 + \frac{27}{x_1}} \in (0, \frac{m}{18}]$,

$\forall x_2 < 3$ 时, $|x_2 - m| \geq 0$, $g(x_2) = 9k(x_2) = 9 \cdot (\frac{1}{3})^{|x_2 - m|} \in (0, 9]$,

由题意可得 $(0, \frac{m}{18}] \subseteq (0, 9]$, 可得 $\frac{m}{18} \leq 9$, 即 $m \leq 162$;

综上可得 $0 < m < 3$;

③当 $m \geq 3$ 时, $\forall x_1 \geq 3$ 时, $g(x_1) = h(x_1) = \frac{m}{3x_1 + \frac{27}{x_1}} \in (0, \frac{m}{18}]$,

$\forall x_2 < 3$ 时, $|x_2 - m| > m - 3 \geq 0$, $g(x_2) = 9k(x_2) = 9 \cdot (\frac{1}{3})^{|x_2 - m|} \in (0, 9 \cdot (\frac{1}{3})^{m-3})$,

由题意可得 $(0, \frac{m}{18}] \subseteq (0, 9 \cdot (\frac{1}{3})^{m-3})$,

可得 $\frac{m}{18} < 3^{5-m}$, 可令 $H(x) = 3^{5-x} - \frac{x}{18}$, 则 $H(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减, $H(6) = 0$,

$\frac{m}{18} < 3^{5-m}$, 可得 $m < 6$, 即 $3 \leq m < 6$,

综上可得 $0 < m < 6$,

所以 m 的取值范围是 $(0, 6)$.