2024 年江苏省南通市高考数学四模试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (5 分) 已知集合 $M = \{x | |x - 1| \leq 2\}$, $N = \{x | x > 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ B. $\{x | 2 < x < 3\}$ C. $\{x | x > 2\}$ D. $\{x | x \geq -1\}$
- (5 分) 某志愿者小组有 5 人, 从中选 3 人到 A、B 两个社区开展活动, 其中 1 人到 A 社区, 则不同的选法有 ()

A. 12 种 B. 24 种 C. 30 种 D. 60 种
- (5 分) 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 ()

A. $-\vec{a}$ B. $-\vec{b}$ C. $\vec{a}$ D. $\vec{b}$
- (5 分) 已知球的半径为 1, 其内接圆锥的高为 $\frac{3}{2}$, 则该圆锥的侧面积为 ()

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 3π
- (5 分) 已知函数 $f(x) = \ln(ax + 2)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a < 0$ B. $-1 \leq a < 0$ C. $-1 < a < 0$ D. $a \geq -1$
- (5 分) 下列函数中, 以 π 为周期, 且其图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称的是 ()

A. $y = \tan x$ B. $y = |\sin x|$
C. $y = 2\cos^2 x - 1$ D. $y = \sin x - \cos x$
- (5 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , AB 为过点 F_1 的弦, M 为 AF_1 的中点, $3\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{F_1B}$, $AB \perp MF_2$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{2}{7}$
- (5 分) 一个正八面体的八个面上分别标以数字 1 到 8, 将其随机抛掷两次, 记与地面接触面上的数字依次为 x_1, x_2 , 事件 $A = "x_1 = 3"$, 事件 $B = "x_2 = 6"$, 事件 $C = "x_1 + x_2 = 9"$, 则 ()

A. $AB = C$ B. $A + B = C$
C. A, B 互斥 D. B, C 相互独立

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (6分) 已知 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 下列结论不正确的是 ()

- A. 若 $\alpha // \beta, a // \alpha, b // \beta$, 则 $a // b$
- B. 若 $\alpha \perp \beta, a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则 $a \perp b$
- C. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // \beta, b // \alpha$, 则 $\alpha // \beta$
- D. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // \beta, a \perp b$, 则 $\alpha \perp \beta$

(多选) 10. (6分) 设抛物线 $C: x^2=4y$ 的焦点为 F, P 是 C 上的一个动点, 则下列结论正确的是 ()

- A. 点 P 到 F 的距离比到 x 轴的距离大 2
- B. 点 P 到直线 $y=x-3$ 的最小距离为 $\sqrt{2}$
- C. 以 PF 为直径的圆与 x 轴相切
- D. 记点 P 在 C 的准线上的射影为 H , 则 $\triangle PFH$ 不可能是正三角形

(多选) 11. (6分) 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是直线 $y=a$ 与曲线 $y=x(1-\ln x)$ 的两个交点的横坐标, 则 ()

- A. $x_1 x_2 < e$
- B. $x_2 \ln x_1 > x_1 \ln x_2$
- C. $\exists a \in (0, 1), x_2 - x_1 > e^a$
- D. $\forall a \in (0, 1), x_1 \ln x_1 + x_2 > a$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. (5分) 复数 $2-3i$ 与 $-1+i$ 分别表示向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$, 记表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 的复数为 z , 则 $\overline{z \cdot z} =$ _____.

13. (5分) 某牧场今年初牛的存栏数为 1200, 预计以后每年存栏数的增长率约为 10%, 且每年年底卖出 100 头牛. 设牧场从今年起的十年内每年年初的计划存栏数依次为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$, 则 $a_3 =$ _____, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____ ($1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}^*$).

14. (5分) 在梯形 $ABCD$ 中, $AB // CD, DA = DB = DC = 1$, 则该梯形周长的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分) 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax^3 - 2x + 1$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求过点 $(0, -1)$ 且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线方程;
- (2) x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $f(x_1) + f(x_2)$ 为定值.

16. (15分) 如图, 在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $D_1D \perp$ 平面 $ABCD, AD // BC, AD = DC = 2, BC = 1, \angle BCD = 60^\circ, A_1D_1 = D_1D = 1$.

- (1) 记平面 A_1ADD_1 与平面 B_1BCC_1 的交线为 l , 证明: $l // BC$;