

2023-2024 学年江苏省淮安市清江浦区淮阴中学等四校高三（上）期初联考数学试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. (5 分) 设集合 $A = \{m, -1, 2\}$ ，其中 m 为实数．令 $B = \{a^3 | a \in A\}$ ， $C = A \cup B$ ．若 C 的所有元素和为 9，则 C 的所有元素之积为 ()
 A. 0 B. 2 C. 4 D. 0 或 4
2. (5 分) 已知复数 z 满足 $|z|=1$ ，且 $\frac{z+1}{z+1} = \frac{1}{3} + ai$ ，则 $|a| =$ ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
3. (5 分) 设整数 $n \geq 4$ ， $P(a, b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，其中 $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ， $a > b$ ，记 A_n 为满足 $a - b \geq 3$ 的点 P 的个数，则 $A_n =$ ()
 A. $n - 3$ B. $n(n - 1)$
 C. $n - 2$ D. $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$
4. (5 分) 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin A = \cos B = \tan C$ ，则 A 与 B 的关系为 ()
 A. $A - B = \frac{\pi}{2}$ B. $A + B = \frac{\pi}{2}$ C. $B - A = \frac{\pi}{2}$ D. $A + B = \frac{\pi}{3}$
5. (5 分) 1986 年 4 月 26 日，乌克兰普里皮亚季邻近的切尔诺贝利核电站发生爆炸，核泄漏导致事故所在地被严重污染，主要的核污染物为铯 - 90，它每年的衰减率约为 2.5%．专家估计，当铯 - 90 含量减少至初始含量的约 1.6×10^{-9} 倍时，可认为该次核泄漏对自然环境的影响已经消除，这一过程约持续 (参考数据： $\lg 2 \approx 0.301$ ， $\lg 975 \approx 2.989$) ()
 A. 400 年 B. 600 年 C. 800 年 D. 1000 年
6. (5 分) 已知线段 AB 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的一条弦，且 AB 中点 M 在 $x=1$ 上，则点 A 横坐标 ()
 A. 有最大值，无最小值 B. 无最大值，有最小值
 C. 无最大值，无最小值 D. 有最大值，有最小值
7. (5 分) 一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和，最后一行仅有一个数，第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是 ()
 A. $101 \cdot 2^{98}$ B. $101 \cdot 2^{97}$ C. $100 \cdot 2^{98}$ D. $100 \cdot 2^{97}$
8. (5 分) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ， $f(0) = 0$ ，对于 $x, y \neq 0$ ，有 $g(xy) = g(x) + g(y)$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

()

A. 极大值点

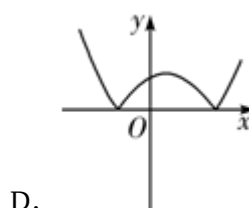
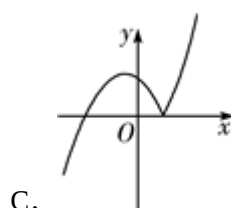
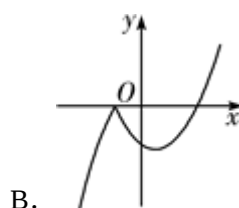
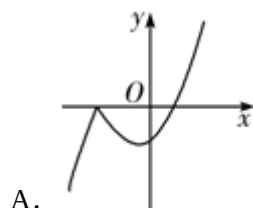
B. 极小值点

C. 非极大极小值点

D. ABC 选项均可能

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (5 分) 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，则函数 $f(x) = |x+a|(x-2a)$ 的图象可能是 ()



(多选) 10. (5 分) 已知 O 为坐标原点，点 $A(\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta})$ ， $B(\sin \theta, \cos \theta)$ ， $C(\frac{1}{\sin^2 \theta}, \frac{1}{\cos^2 \theta})$ ， $D(8, 1)$ ，其中 θ 为锐角，则 ()

A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 为定值

B. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ 的最大值为 3

C. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ 的最小值为 $9+4\sqrt{2}$

D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ 的最小值为 $5\sqrt{5}$

(多选) 11. (5 分) 有方程 $x+y+z=2023$ ，试讨论有序数对 (x, y, z) 解的个数。下列分析正确的是 ()

A. 若 x, y, z 均为正整数，则 (x, y, z) 解的个数为 C_{2022}^2

B. 若 x, y, z 均为非负整数，则 (x, y, z) 解的个数为 C_{2025}^2

C. 若 x, y, z 均为正整数，且 x, y, z 两两不等，则 (x, y, z) 解的个数为 341044

D. 若 x, y, z 均为正整数且满足 $x \leq y \leq z$ ，则 (x, y, z) 解的个数为 341044

(多选) 12. (5 分) 设函数 $f(x) = f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ，且 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ，则下列判断

正确的是（ ）

- A. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $y=f_n(x)$ 的图象关于原点对称
- B. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 直线 $y=m$ ($m>0$) 和 $y=f_n(x)$ 的图象至多只有一个交点
- C. $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 命题 “ $\exists a, b \in \mathbf{R}$, 满足 $(a-b)[f_n(a) - f_n(b)] < 0$ ” 成立
- D. $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\forall y \in (0, +\infty)$, 都有 $f_1(y) + f_2(y) + \cdots + f_n(y) > 2\sqrt{n}$ 成立

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. (5 分) 请写出一个同时满足以下三个条件的函数 $f(x) =$ _____.

- ① $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$;
- ② $f(x)$ 是偶函数;
- ③ $f(x)$ 的值域为 $[0, 1)$.

14. (5 分) 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为_____。(用数字作答)

15. (5 分) 将边长为 1 的正三角形薄铁片，沿一条平行于某边的直线剪成两块，其中一块是梯形，记 $S = \frac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$ ，则 S 的最小值是_____.

16. (5 分) 设椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{20} = 1$ ($a > 2\sqrt{5}$) 的右焦点为 F ，过点 $P(1, 1)$ 的直线 l 与椭圆交于点 A ,

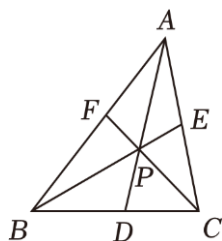
B , M 为 AB 的中点，使得 $|FM|$ 是 $|FA|$ 、 $|FB|$ 的等比中项，则 a 的最小整数值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P ，直线 AP 、 BP 、 CP 分别与边 BC 、 CA 、 AB 相交于点 D 、 E 、 F .

(1) 试证明: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle DAC}$;

(2) 若 P 为重心， $AD=5$, $BE=4$, $CF=3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



18. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_2 + a_5 = 16$, $a_5 - a_3 = 4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$;

(II) 已知 $\{b_n\}$ 为等比数列, 对于任意 $k \in \mathbf{N}^*$, 若 $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$, 则 $b_k < a_n < b_{k+1}$.

(i) 当 $k \geq 2$ 时, 求证: $2^k - 1 < b_k < 2^{k+1}$;

(ii) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和.

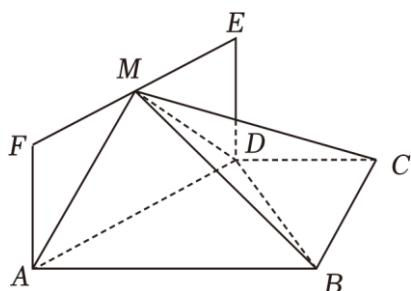
19. (12 分) 如图, 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ADEF$ 为矩形, 且 M 为线段 EF 上的动点, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 2DE$, $AB = 2CD = 2BC = 2$.

(1) 当 M 为线段 EF 的中点时,

(i) 求证: $AM \perp$ 平面 BDM ;

(ii) 求直线 AM 与平面 MBC 所成角的正弦值;

(2) 记直线 AM 与平面 MBC 所成角为 α , 平面 MAD 与平面 MBC 的夹角为 β , 是否存在点 M 使得 $\alpha = \beta$? 若存在, 求出 FM ; 若不存在, 说明理由.



20. (12 分) 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$.

(1) 求 C 的右支与直线 $x = 100$ 围成的区域内部 (不含边界) 整点 (横纵坐标均为整数的点) 的个数.

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $(-2, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P , 证明: 点 P 在定直线上.

21. (12 分) 某高校数学系计划在周六和周日各举行一次主题不同的心理测试活动, 分别由李老师和张老师负责, 已知该系共有 n 位学生, 每次活动均需该系 k 位学生参加 (n 和 k 都是固定的正整数), 假设李老师和张老师分别将各自活动通知的信息独立、随机地发给该系 k 位学生, 且所发信息都能收到, 记该系收到李老师或张老师所发活动通知信息的学生人数为 X .

(I) 求该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率;

(II) 求使 $P(X=m)$ 取得最大值的整数 m .

22. (12 分) 设 $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1} + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$, a, b 为常数), 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = \frac{3}{2}x$

在 $(0, 0)$ 点相切.

(I) 求 a, b 的值;

（II）证明：当 $0 < x < 2$ 时， $f(x) < \frac{9x}{x+6}$.

2023-2024 学年江苏省淮安市清江浦区淮阴中学等四校高三（上）期初联考数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. (5 分) 设集合 $A = \{m, -1, 2\}$ ，其中 m 为实数．令 $B = \{a^3 | a \in A\}$ ， $C = A \cup B$ ．若 C 的所有元素和为 9，则 C 的所有元素之积为 ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 0 或 4

【答案】 A

【分析】 根据集合中元素的互异性讨论参数的取值，然后得到并集的结果，根据并集中的元素之和求出参数，然后求元素之积．

【解答】 解：根据集合中元素的互异性， $m \neq -1$ 且 $m \neq 2$ ．由题意， $B = \{a^3 | a \in A\} = \{m^3, -1, 8\}$ ．

情况一：若 $m^3 = m$ 时，即 $m = 0$ 或 $m = 1$ ，

当 $m = 0$ 时， $A = \{0, -1, 2\}$ ， $B = \{0, -1, 8\}$ ， $C = A \cup B = \{0, -1, 2, 8\}$ ，

C 的所有元素和为 9，符合题意，此时 C 的所有元素之积为 0；

当 $m = 1$ 时， $A = \{1, -1, 2\}$ ， $B = \{1, -1, 8\}$ ， $C = A \cup B = \{1, -1, 2, 8\}$ ，

C 的所有元素和为 10，不符题意；

情况二：若 $m^3 = 2$ 时，此时 $m = \sqrt[3]{2}$ ，

$A = \{\sqrt[3]{2}, -1, 2\}$ ， $B = \{2, -1, 8\}$ ，

但 $C = A \cup B$ 此时含有唯一的无理数 $\sqrt[3]{2}$ ，不可能元素之和为 9，舍去；

情况三：若 $m \neq \pm 1$ ， $m \neq 2$ ， $m \neq \sqrt[3]{2}$ 且 $m \neq 0$ 时，则 A, B 中只有唯一重复元素 -1 ，

则 $C = A \cup B = \{m, -1, 2, m^3, 8\}$ ，由题意 $m - 1 + 2 + m^3 + 8 = 9$ ，

即 $m^3 + m = 0 = m(m^2 + 1)$ ，此时 $m = 0$ ，矛盾．

综上所述， $m = 0$ 时符合题意，此时 C 的所有元素之积为 0．

故选：A．

2. (5 分) 已知复数 z 满足 $|z| = 1$ ，且 $\frac{z+1}{z+1} = \frac{1}{3} + ai$ ，则 $|a| = ()$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【分析】由题设令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ，利用复数除法化简 $\frac{z+1}{z+1}$ ，再由复数相等求 $|a|$ 。

【解答】解：令 $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq -1$ ，则 $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta \neq -1$ ，

$$\text{所以 } \frac{z+1}{z+1} = \frac{\cos\theta + 1 + i\sin\theta}{\cos\theta + 1 - i\sin\theta} = \frac{(\cos\theta + 1 + i\sin\theta)^2}{(\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta} = \frac{2\cos^2\theta + 2\cos\theta + 2\sin\theta(\cos\theta + 1)i}{2 + 2\cos\theta}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{3} + ai,$$

$$\text{则 } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{3}, \\ \sin\theta = a \end{cases} \text{ 故 } |a| = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故选：B.

3. (5分) 设整数 $n \geq 4$ ， $P(a, b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，其中 $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ， $a > b$ ，记 A_n 为满足 $a - b \geq 3$ 的点 P 的个数，则 $A_n =$ ()

- A. $n - 3$ B. $n(n - 1)$
C. $n - 2$ D. $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

【答案】D

【分析】由题意 $a \geq b + 3$ 且 $b \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，则 $a \in \{4, 5, 6, \dots, n\}$ ，分析 b 的不同取值对应 a 的个数，再应用等差数列前 n 项和公式求点 P 的个数。

【解答】解：由题意 $a \geq b + 3$ 且 $b \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，故 $a \in \{4, 5, 6, \dots, n\}$ ，整数 $n \geq 4$ ，当 $b = 1$ ，对应 a 有 $n - 3$ 个；当 $b = 2$ ，对应 a 有 $n - 4$ 个；……；当 $b = n - 3$ ，对应 a 有 1 个；所以满足 $a - b \geq 3$ 的点 P 的个数 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ 。

故选：D.

4. (5分) 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin A = \cos B = \tan C$ ，则 A 与 B 的关系为 ()

- A. $A - B = \frac{\pi}{2}$ B. $A + B = \frac{\pi}{2}$ C. $B - A = \frac{\pi}{2}$ D. $A + B = \frac{\pi}{3}$

【答案】A

【分析】依题意由 $\sin A = \cos B$ 可得 $A = B + \frac{\pi}{2}$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$ ，再分类讨论，即可判断。

【解答】解：因为 $\sin A = \cos B$ ，且 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\sin A = \cos B > 0$ ，

所以 $0 < B < \frac{\pi}{2}$,

所以 $A=B+\frac{\pi}{2}$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,

若 $A+B=\frac{\pi}{2}$, 则 $C=\frac{\pi}{2}$, 此时 $\tan C$ 不存在, 故舍去,

所以 $A=\frac{\pi}{2}+B$, 即 $A-B=\frac{\pi}{2}$.

故选: A.

5. (5 分) 1986 年 4 月 26 日, 乌克兰普里皮亚季邻近的切尔诺贝利核电站发生爆炸, 核泄漏导致事故所在地被严重污染, 主要的核污染物为铯 - 90, 它每年的衰减率约为 2.5%. 专家估计, 当铯 - 90 含量减少至初始含量的约 1.6×10^{-9} 倍时, 可认为该次核泄漏对自然环境的影响已经消除, 这一过程约持续 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 975 \approx 2.989$) ()

A. 400 年 B. 600 年 C. 800 年 D. 1000 年

【答案】C

【分析】利用题中的条件, 建立等式关系, 即可解出.

【解答】解: 设初始量为 a , n 年后为初始含量的 1.6×10^{-9} 倍,

$$\therefore a \times (1 - 2.5\%)^n = 1.6 \times 10^{-9} \times a,$$

$$\therefore \left(\frac{975}{1000}\right)^n = 1.6 \times 10^{-9},$$

两边同时取常用对数得, $n(\lg 975 - 3) = \lg 16 - 10$,

$$\therefore n = 799.63636 \approx 800,$$

故选: C.

6. (5 分) 已知线段 AB 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的一条弦, 且 AB 中点 M 在 $x=1$ 上, 则点 A 横坐标 ()

A. 有最大值, 无最小值 B. 无最大值, 有最小值
C. 无最大值, 无最小值 D. 有最大值, 有最小值

【答案】D

【分析】由题意, 可知当点 A 在原点时横坐标有最小值 0, 由于 AB 中点 M 在 $x=1$ 上, 从而最大值为 2.

【解答】解: 由题意, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

由抛物线范围可知, $x \geq 0$,

如图 1, 当点 A 在原点时横坐标有最小值, 为 0,

由 AB 中点 M 在 $x=1$ 上，可知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ ，即 $x_1=2-x_2$ ，

$\therefore x_1 \leq 2$ ，

即如图 2，当点 B 在原点时，点 A 横坐标有最大值，为 2.

故选：D.

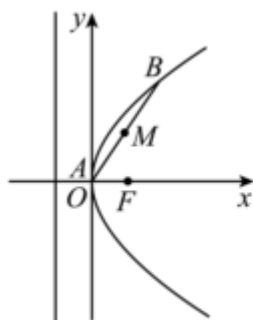


图1

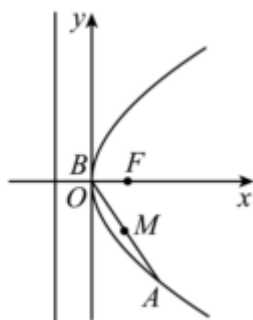


图2

7. (5 分) 一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和，最后一行仅有一个数，第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是 ()

A. $101 \cdot 2^{98}$

B. $101 \cdot 2^{97}$

C. $100 \cdot 2^{98}$

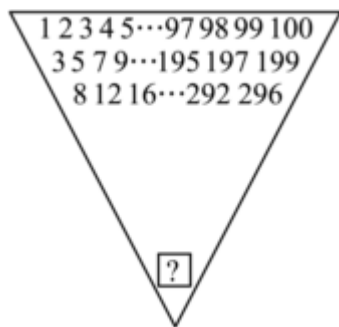
D. $100 \cdot 2^{97}$

【答案】A

【分析】先发现每一行的公差规律，然后利用数表的性质进行求解.

【解答】解：根据下列数表的规律可以发现，第一行的公差是 2^0 ，第二行公差是 2^1 ，

然后下面每一行的公差依次是 $2^2, 2^3, \dots$ 第 99 行的公差是 2^{98} ，



设第 n 行的第一个数是 a_n ，

则 $a_{100} = a_{99} + (a_{99} + 2^{98}) = 2a_{99} + 2^{98} = 2(2a_{98} + 2^{97}) + 2^{98} =$

$2^2 a_{98} + 2 \cdot 2^{98} = \dots = 2^{99} a_1 + 99 \cdot 2^{98} = 101 \cdot 2^{98}$ ，

即第 100 行第 1 个数是 $101 \cdot 2^{98}$ 。

故选：A.

8. (5 分) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ， $f(0) = 0$ ，对于 $x, y \neq 0$ ，有 $g(xy) = g(x) + g(y)$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

()

A. 极大值点

B. 极小值点

C. 非极大极小值点

D. ABC 选项均可能

【答案】D

【分析】由题意，根据极值点的定义，结合对数函数的性质，可得答案.

【解答】解：因为对于 $x, y \neq 0$ ，有 $g(xy) = g(x) + g(y)$ ，

可设 $g(x) = \ln|x|$ ，

$$\text{此时 } f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

易知函数 $f(x)$ 在定义域内连续且为偶函数，

当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时， $\ln|x| < 0$ ，

所以 $f(x) < 0 = f(0)$ ，

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点；

可设 $g(x) = -\ln|x|$ ，

$$\text{此时 } f(x) = \begin{cases} -x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

易知函数 $f(x)$ 在定义域内连续且为偶函数，

当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时， $\ln|x| < 0$ ，

所以 $f(x) > 0 = f(0)$ ，

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点；

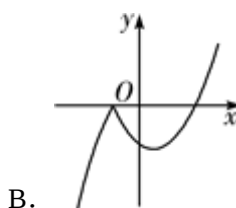
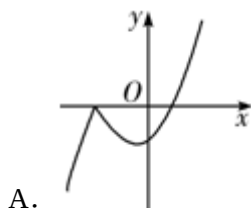
当 $f(x) = 0, g(x) = 0 (x \neq 0)$ ，其满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$ ，

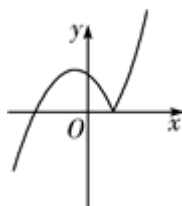
所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的非极大极小值点.

故选：D.

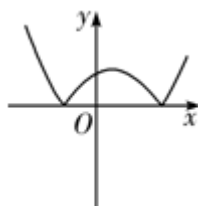
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

(多选) 9. (5 分) 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，则函数 $f(x) = |x+a|(x-2a)$ 的图象可能是 ()





C.

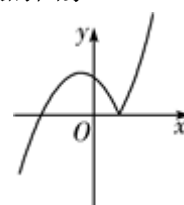
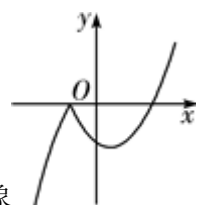


D.

【答案】BC

【分析】通过 a 的取值，判断函数的图象的形状，推出结果即可.

【解答】解：不妨 $a=1$ ，函数的解析式为： $f(x) = |x+1|(x-2)$ ，此时函数的图象



当 $a=-1$ 时，函数的解析式为： $f(x) = |x-1|(x+2)$ ，此时函数的图象为：

故选：BC.

(多 选) 10 . (5 分) 已知 O 为坐标原点，点 $A(\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta})$ ， $B(\sin \theta, \cos \theta)$ ， $C(\frac{1}{\sin^2 \theta}, \frac{1}{\cos^2 \theta})$ ， $D(8, 1)$ ，其中 θ 为锐角，则 ()

A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 为定值

B. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ 的最大值为 3

C. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ 的最小值为 $9+4\sqrt{2}$

D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ 的最小值为 $5\sqrt{5}$

【答案】ACD

【分析】由向量数量积、模长的坐标表示写出各项关于 θ 对应的表达式，应用三角恒等变换、基本不等式“1”的代换判断各项正误.

【解答】解：由 θ 为锐角，故 $\sin \theta, \cos \theta \in (0, 1)$ ，

对于选项 A， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{\sin \theta} \times \sin \theta + \frac{1}{\cos \theta} \times \cos \theta = 2$ 为定值，

即选项 A 正确；

对 于 选 项 B，

$$|\vec{OA} + \vec{OB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\theta} + \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\theta \cos\theta}\right)^2 + 5} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 2\theta} + 5},$$

所以 $|\vec{OA} + \vec{OB}| \geq 3$,

当且仅当 $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立,

故 $|\vec{OA} + \vec{OB}|$ 的最小值为 3,

即选项 B 错误;

对于选项 C, $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{8}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{8}{\sin^2\theta} + \frac{1}{1-\sin^2\theta}$, 而 $\sin^2\theta, 1-\sin^2\theta \in (0, 1)$,

所以

$$\begin{aligned} & \left(\frac{8}{\sin^2\theta} + \frac{1}{1-\sin^2\theta}\right)(\sin^2\theta + 1 - \sin^2\theta) = \frac{8(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} + 9 \\ & \geq 2\sqrt{\frac{8(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}} + 9 = 9 + 4\sqrt{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\sin\theta = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}}{7}}$ 时等号成立,

故 $\vec{OC} \cdot \vec{OD}$ 的最小值为 $9+4\sqrt{2}$,

即选项 C 正确;

对于选项 D, $\vec{OA} \cdot \vec{OD} = \frac{8}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$, 且 $\sin\theta, \cos\theta \in (0, 1)$,

则设 $f(\theta) = \frac{8}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$f'(\theta) = \frac{-8\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{(\sin\theta - 2\cos\theta)(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta},$$

则当 $0 < \tan\theta < 2$ 时, $f'(\theta) < 0$, 当 $\tan\theta > 2$ 时, $f'(\theta) > 0$,

即 $\tan\theta = 2$, 即 $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, $\frac{8}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$ 取最小值 $5\sqrt{5}$.

即选项 D 正确.

故选: ACD.

(多选) 11. (5 分) 有方程 $x+y+z=2023$, 试讨论有序数对 (x, y, z) 解的个数. 下列分析正确的是 ()

A. 若 x, y, z 均为正整数, 则 (x, y, z) 解的个数为 C_{2022}^2

B. 若 x, y, z 均为非负整数, 则 (x, y, z) 解的个数为 C_{2025}^2

C. 若 x, y, z 均为正整数, 且 x, y, z 两两不等, 则 (x, y, z) 解的个数为 341044

D. 若 x, y, z 均为正整数且满足 $x \leq y \leq z$, 则 (x, y, z) 解的个数为 341044

【答案】 ABD

【分析】 AB 可转化为排列组合问题用挡板法可得; C 选项可先求 x, y, z 相等时 (x, y, z) 的解个数, 再用排除法可得; D 选项分为由相等和不相等并且 $x \leq y \leq z$ 的不同的类, 利用分类加法可得.

【解答】 解: 选项 A: 因 x, y, z 均为正整数, $x+y+z=2023$,

则 (x, y, z) 解的个数相当于把 2023 个 1 用两个挡板分成 3 份, 分别对应 x, y, z ,

所以 (x, y, z) 解的个数为 C_{2022}^2 , 故 A 正确;

选项 B: 由 $x+y+z=2023$ 得 $(x+1) + (y+1) + (z+1) = 2026$,

因 x, y, z 均为非负整数, 所以 $(x+1), (y+1), (z+1)$ 均为正整数,

(x, y, z) 与 $(x+1, y+1, z+1)$ 一一对应,

$(x+1) + (y+1) + (z+1) = 2026$ 相当于把 2026 个 1 用两个挡板分成 3 份, 分别对应 $x+1, y+1, z+1$,

所以 (x, y, z) 解的个数为 C_{2025}^2 , 故 B 正确;

C 选项: 因 x, y, z 均为正整数, $x+y+z=2023$,

若 $x=y=z$, 则 $x = \frac{2023}{3}$, 不满足 x 为正整数,

故 x, y, z 至多有两个相等,

若 $x=y \neq z$, 则 $2x+z=2023$, 故 x 的取值为从 1 到 1011 的整数, 共 1011 个,

所以 x, y, z 有两个相等时 (x, y, z) 的个数为 $C_3^2 \times 1011 = 3033$ 个,

故 x, y, z 两两不等时, (x, y, z) 解的个数为 $C_{2022}^2 - 3033 = 2040198$ 个, 故 C 错误;

选项 D: 若 x, y, z 均为正整数且满足 $x \leq y \leq z$,

当 $x=y \leq z$ 时, 因 $x+y+z=2023$,

所以 $z=2023-2x > x$, 得 $x < \frac{2023}{3}$, 即 $x \leq 674$,

所以 x 的取值为从 1 到 674 的整数, 共 674 个,

此时 (x, y, z) 的个数为 674 个.

当 $x \leq y = z$ 时, 因 $x+y+z=2023$,

所以 $y = \frac{2023-x}{2} \geq x$, 得 $x \leq \frac{2023}{3}$, 即 $x \leq 674$,

因 y 取正整数, 所以 x 的取值为从 1 到 674 的奇数, 共 337 个,

此时 (x, y, z) 的个数为 337 个,

当 $x < y < z$ 时,

2023 个 1 用两个隔板分成 3 份, 将其从小到大, 分别对应 x, y, z ,

$$\text{有 } \frac{C_{2022}^2 - 3033}{A_3^3} = 340033,$$

共有 $340033 + 674 + 337 = 341044$, 故 D 正确.

故选: ABD.

(多选) 12. (5 分) 设函数 $f(x) = f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 且 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, 则下列判断

正确的是 ()

A. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $y = f_n(x)$ 的图象关于原点对称

B. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 直线 $y = m$ ($m > 0$) 和 $y = f_n(x)$ 的图象至多只有一个交点

C. $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 命题 “ $\exists a, b \in \mathbf{R}$, 满足 $(a - b)[f_n(a) - f_n(b)] < 0$ ” 成立

D. $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\forall y \in (0, +\infty)$, 都有 $f_1(y) + f_2(y) + \cdots + f_n(y) > 2\sqrt{n}$ 成立

【答案】AB

【分析】由递推关系得到 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}$, 即可得到函数的奇偶性, 再判断函数的单调性, 即可判断 A、B、C, 再利用放缩法证明, 即可判断 D.

【解答】解: 由题可得 $f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$, 同理得

$$f_3(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}, \dots,$$

$$\text{由此推得 } f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

所以 $f_n(-x) = -f_n(x)$, 则 $y = f_n(x)$ 为奇函数, 函数图象关于原点对称, 故 A 对;

当 $x > 0$ 时, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{x^2}}}$, 所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, B 对, C 错;

$$\forall y \in (0, +\infty), f_n(y) < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\text{故 } f_1(y) + f_2(y) + \cdots + f_n(y) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\text{当 } k \geq 1 \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}),$$

$$\text{则 } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, D \text{ 错.}$$

故选：AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. (5 分) 请写出一个同时满足以下三个条件的函数 $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$ (答案不唯一).

① $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$;

② $f(x)$ 是偶函数;

③ $f(x)$ 的值域为 $[0, 1)$.

【答案】 $-\frac{x^2}{x^2+1}$ (答案不唯一).

【分析】 由题意，利用函数的奇偶性、定义域和值域，得出结论.

【解答】 解：同时满足以下三个条件① $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ ；② $f(x)$ 是偶函数；③ $f(x)$ 的值域为 $[0, 1)$ ，

$$\text{则函数 } f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{x^2}{x^2+1} \text{ (答案不唯一).}$$

14. (5 分) 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为 15000. (用数字作答)

【答案】 见试题解答内容

【分析】 由题设条件可知，满足条件的方案有两种情形：(1) 有一个项目有 3 人参加；(2) 有两个项目各有 2 人参加，由此可得结论.

【解答】 解：由题设条件可知，满足条件的方案有两种情形：

(1) 有一个项目有 3 人参加，共有 $C_7^3 \cdot 5! - C_5^1 \cdot 5! = 3600$ 种方案；

(2) 有两个项目各有 2 人参加，共有 $\frac{1}{2}(C_7^2 \cdot C_5^2) \cdot 5! - C_5^2 \cdot 5! = 11400$ 种方案；

所以满足题设要求的方案数为 $3600 + 11400 = 15000$ 。

故答案为：15000

15. (5 分) 将边长为 1 的正三角形薄铁片，沿一条平行于某边的直线剪成两块，其中一块是梯形，记 $S =$

$\frac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$ ，则 S 的最小值是 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ 。

【答案】见试题解答内容

【分析】先设剪成的小正三角形的边长为 x ，用 x 表示出梯形的周长和面积，从而得到 S 的解析式，对函数 S 进行求导，令导函数等于 0 求出 x 的值，根据导函数的正负判断函数的单调性进而确定最小值。

【解答】解：设剪成的小正三角形的边长为 x ，则梯形的周长为 $3 - x$ ，

梯形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$ ，

$$\therefore S = \frac{(3-x)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)} \quad (0 < x < 1),$$

$$\therefore S' = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2(3x-1)(x-3)}{(1-x^2)^2},$$

$$\text{令 } S' = 0, \because 0 < x < 1, \therefore x = \frac{1}{3},$$

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时， $S' < 0$ ，当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时， $S' > 0$ ，

$\therefore x = \frac{1}{3}$ 时， S 取极小值，也为最小值，且为 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ 。

故答案为： $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ 。

16. (5 分) 设椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{20} = 1 (a > 2\sqrt{5})$ 的右焦点为 F ，过点 $P(1, 1)$ 的直线 l 与椭圆交于点 A ，

B ， M 为 AB 的中点，使得 $|FM|$ 是 $|FA|$ 、 $|FB|$ 的等比中项，则 a 的最小整数值为 7。

【答案】7.

【分析】根据中点的性质，结合点到直线距离公式、点与椭圆的位置关系、等比中项的性质进行求解即可。

$$\text{【解答】解：} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{20} \leq \frac{1}{25} + \frac{1}{20} < 1,$$

$\therefore$ 点 $P(1, 1)$ 在该椭圆内，因此过点 $P(1, 1)$ 的直线 l 与椭圆必有两个交点，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

∵ M 为 AB 的中点，

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{FM}|^2 &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB})^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{FA}^2 + \overrightarrow{FB}^2 + 2\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}) \\ &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{FA}|^2 + |\overrightarrow{FB}|^2 + 2|\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{FB}| \cdot \frac{|\overrightarrow{FA}|^2 + |\overrightarrow{FB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{FB}|}) \\ &= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{FA}|^2 + |\overrightarrow{FB}|^2) - \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2,\end{aligned}$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{FM}|^2 = \frac{1}{2} (|\overrightarrow{FA}|^2 + |\overrightarrow{FB}|^2) - \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2,$$

∵ $|FM|$ 是 $|FA|$ 、 $|FB|$ 的等比中项，∴ $|FM|^2 = |FA| \cdot |FB|$ ，

于是有 $|AB|^2 = 2(|FA| - |FB|)^2$ ，由已知得 $b^2 = 20$ ， $c = \sqrt{a^2 - 20^2}$ ，

$$\therefore |FA| = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + c^2 - 2cx_1 + b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)} = a - \frac{c}{a}x_1,$$

$$\text{同理： } |FB| = a - \frac{c}{a}x_2,$$

$$\text{由 } |AB|^2 = 2(|FA| - |FB|)^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2\left[\frac{c^2}{a^2}(x_2 - x_1)^2\right],$$

$$\text{即 } (y_1 - y_2)^2 = \frac{a^2 - 40}{a^2}(x_2 - x_1)^2, \text{ 则有 } a^2 - 40 \geq 0, \text{ 得 } a^2 \geq 40.$$

∴ a 的最小整数值为 7.

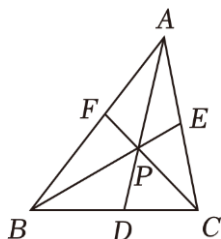
故答案为：7.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P ，直线 AP 、 BP 、 CP 分别与边 BC 、 CA 、 AB 相交于点 D 、 E 、 F 。

(1) 试证明： $\frac{BD}{DC} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle DAC}$ ；

(2) 若 P 为重心， $AD=5$ ， $BE=4$ ， $CF=3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。



【答案】(1) 证明见解析；(2) 8.

【分析】(1) 利用正弦定理及角的互补关系即可证结论；

(2) 由题意 AD, BE, CF 为中线, 可得 $AP=\frac{10}{3}, PD=\frac{5}{3}, BP=\frac{8}{3}, PE=\frac{4}{3}, CP=2, PF=1$, 再由 $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PE}$, 求 $\cos\angle BPC, \cos\angle APB, \cos\angle APC$, 进而求对应正弦值, 结合 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}$ 及三角形面积公式求面积.

【解答】解: (1) $\triangle ABD$ 中 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$, 则 $BD=\frac{AB\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}$, $\triangle ACD$ 中 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle DAC}$, 则 $DC=\frac{AC\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}$, 又 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$, 则 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$,

所以 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle DAC}$, 得证;

(2) 由 P 是重心, 则 AD, BE, CF 为中线, 又 $AD=5, BE=4, CF=3$,

所以 $AP=\frac{10}{3}, PD=\frac{5}{3}, BP=\frac{8}{3}, PE=\frac{4}{3}, CP=2, PF=1$,

而 $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PD}$, 则 $\overrightarrow{PC}^2+2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}^2=4\overrightarrow{PD}^2$,

所以 $4+\frac{32}{3}\cos\angle BPC+\frac{64}{9}=4\times\frac{25}{9}$, 可得 $\cos\angle BPC=0$, 且 $\angle BPC\in(0, \pi)$, 所以 $\angle BPC=\frac{\pi}{2}$,

同理 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PE}$, 可得 $\cos\angle APB=-\frac{4}{5}, \cos\angle APC=-\frac{3}{5}$,

所以 $\sin\angle APB=\frac{3}{5}, \sin\angle APC=\frac{4}{5}$,

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{8}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times 2\times\frac{4}{5}=8$.

18. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2+a_5=16, a_5-a_3=4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$;

(II) 已知 $\{b_n\}$ 为等比数列, 对于任意 $k\in\mathbf{N}^*$, 若 $2^{k-1}\leq n\leq 2^k-1$, 则 $b_k<a_n<b_{k+1}$.

(i) 当 $k\geq 2$ 时, 求证: $2^k-1<b_k<2^{k+1}$;

(ii) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和.

【答案】(I) $a_n=2n+1 (n\in\mathbf{N}^*)$, $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i=3\times 4^{n-1}$.

(II) (i) 证明见解析;

(ii) $b_n=2^n, T_n=2^{n+1}-2$.

【分析】(I) 建立方程组求出首项和公差即可求解.

(II) 根据数列递推关系, 利用极限思想分别求出公比和首项, 即可得到结论.

【解答】解: (I) $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 + a_5 = 16$, $a_5 - a_3 = 4$.

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 2a_1 + 5d = 16 \\ a_1 + 4d - a_1 - 2d = 2d = 4 \end{cases}, \text{ 得 } d=2, a_1=3,$$

则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^+$),

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \text{ 中的首项为 } a_{2^{n-1}} = 2 \times 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1, \text{ 项数为 } 2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = 2^n - 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

$$\text{则 } \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i = 2^{n-1}(2^n+1) + \frac{2^{n-1}(2^{n-1}-1)}{2} \times 2 = 2^{n-1}(2^n+1) + 2^{n-1}(2^{n-1}-1) = 2^{n-1}(2^n+1+2^{n-1}-1) = 2^{n-1}(2^n+2^{n-1}) = 2^{n-1} \times 3 \times 2^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}.$$

$$(II) (i) \because 2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1, \therefore 2^k \leq 2n \leq 2^{k+1} - 2, 1+2^k \leq 2n+1 \leq 2^{k+1} - 1,$$

$$\text{即 } 1+2^k \leq a_n \leq 2^{k+1} - 1,$$

$$\text{当 } k \geq 2 \text{ 时, } \because b_k < a_n < b_{k+1}.$$

$$\therefore b_k < 1+2^k, \text{ 且 } b_{k+1} > 2^{k+1} - 1,$$

$$\text{即 } b_k > 2^k - 1,$$

综上 $2^k - 1 < b_k < 1+2^k$, 故成立;

$$(ii) \because 2^k - 1 < b_k < 2^{k+1} \text{ 成立,}$$

$\because \{b_n\}$ 为等比数列, $\therefore$ 设公比为 q ,

$$\text{当 } k \geq 2 \text{ 时, } 2^{k+1} - 1 < b_{k+1} < 2^{k+1} + 1, \frac{1}{2^{k+1}+1} < \frac{1}{b_{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}-1},$$

$$\text{则 } \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}+1} < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}-1},$$

$$\text{即 } \frac{2(2^k+1)-3}{2^{k+1}+1} < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{2(2^k-1)+3}{2^{k+1}-1},$$

$$\text{即 } 2 - \frac{3}{2^{k+1}+1} < q < 2 + \frac{3}{2^{k+1}-1},$$

$$\text{当 } k \rightarrow +\infty, 2 - \frac{3}{2^{k+1}+1} \rightarrow 2, 2 + \frac{3}{2^{k+1}-1} \rightarrow 2,$$

$$\therefore q=2,$$

$$\because k \geq 2 \text{ 时, } 2^k - 1 < b_k < 2^{k+1},$$

$$\therefore 2^k - 1 < b_1 2^{k-1} < 2^{k+1},$$

$$\text{即 } \frac{2^k-1}{2^{k-1}} < b_1 < \frac{2^{k+1}}{2^{k-1}},$$

$$\text{即 } 2 - \frac{1}{2^{k-1}} < b_1 < 2 + \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\text{当 } k \rightarrow +\infty, 2 - \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 2, 2 + \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 2,$$

$$\text{则 } b_1 = 2,$$

$$\text{则 } b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n, \text{ 即 } \{b_n\} \text{ 的通项公式为 } b_n = 2^n,$$

$$\text{则 } \{b_n\} \text{ 的其前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2.$$

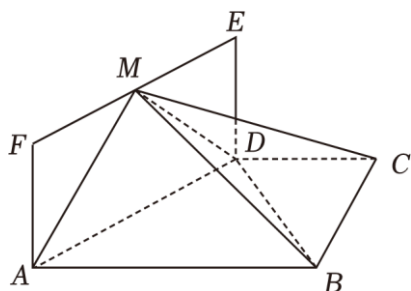
19. (12 分) 如图, 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ADEF$ 为矩形, 且 M 为线段 EF 上的动点, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 2DE$, $AB = 2CD = 2BC = 2$.

(1) 当 M 为线段 EF 的中点时,

(i) 求证: $AM \perp$ 平面 BDM ;

(ii) 求直线 AM 与平面 MBC 所成角的正弦值;

(2) 记直线 AM 与平面 MBC 所成角为 α , 平面 MAD 与平面 MBC 的夹角为 β , 是否存在点 M 使得 $\alpha = \beta$? 若存在, 求出 FM ; 若不存在, 说明理由.



【答案】 (1) (i) 证明见解析; (ii) $\frac{2\sqrt{22}}{11}$;

(2) 存在, $FM = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【分析】 (1) (i) 利用面面垂直的性质可推导出 $BD \perp$ 平面 ADM , 可得出 $AM \perp BD$, 利用勾股定理可得出 $AM \perp DM$, 再利用线面垂直的判定定理可证得结论成立;

(ii) 取 AD 的中点为 P , BC 的中点为 Q , 连接 MP 、 PQ 、 QM , 计算出点 A 到平面 MBC 的距离以及线段 AM 的长, 即可得出直线 AM 与平面 MBC 所成角的正弦值;

(2) 假设存在点 M , 使得 $\alpha = \beta$, 延长 AD 与 BC 交于点 G , 连接 MG , 根据已知条件得出 $\angle AMR$ 是直线 AM 与平面 MBC 所成的角, $\angle ATR$ 是二面角 $A - MG - B$ 的平面角, 计算出 $\triangle AMF$ 三边边长, 利用勾股定理求出 x 的值,

【解答】 解: (1) (i) 由题意, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB \parallel CD$,

$$\text{所以 } \angle BCD = 90^\circ, \text{ 所以 } BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

取 AB 的中点 N ，连接 DN ，则 $CD \parallel BN$ 且 $CD = BN$ ，且 $\angle BCD = 90^\circ$ ，

故四边形 $BCDN$ 为矩形，

则 $DN \parallel BC$ ，且 $DN = BC$ ，所以 $AD = \sqrt{DN^2 + AN^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ，

又由 $AB = 2$ ，所以 $BD^2 + AD^2 = AB^2$ ，所以 $BD \perp AD$ ，

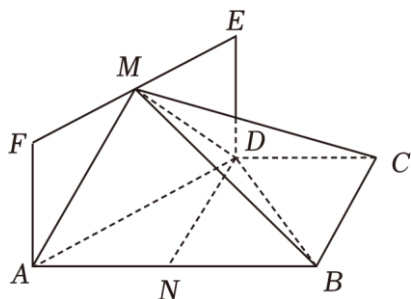
又平面 $ADM \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $ADM \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $BD \perp$ 平面 ADM ，

又 $AM \subset$ 平面 ADM ，所以 $AM \perp BD$ ，

因为 $MD = MA = 1$ ， $AD = \sqrt{2}$ ，则 $AM^2 + DM^2 = AD^2$ ，所以 $AM \perp DM$ ，

又 $DM \cap BD = D$ ， DM 、 $BD \subset$ 平面 BDM ，所以 $AM \perp$ 平面 BDM 。



(ii) 取 AD 的中点为 P ， BC 的中点为 Q ，连接 MP 、 PQ 、 QM ，

过 P 在平面 PQM 内作 PO 垂直于 MQ ，垂足为 O ，

又平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $AF \perp AD$ ，

所以 $AF \perp$ 平面 $ABCD$ ， M 为 EF 的中点，

所以 $MP \parallel AF$ ，所以 $MP \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $BC \perp PM$ ，

又因为 $BC \perp PQ$ ， $PQ \cap PM = P$ ， PQ 、 $PM \subset$ 平面 PMQ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PMQ ， $PO \subset$ 平面 PMQ ，

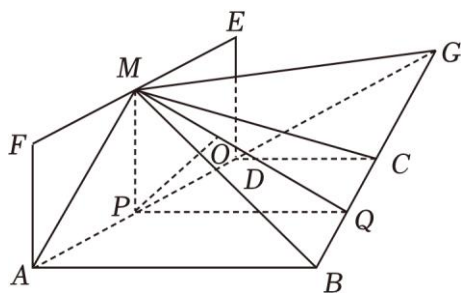
所以 $PO \perp BC$ ， $MQ \cap BC = O$ ， MQ 、 $BC \subset$ 平面 BCM ，

得 $PO \perp$ 平面 BCM ，因为 $MP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $PQ = \frac{3}{2}$ ， $\angle MPQ = \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $MQ = \sqrt{MP^2 + PQ^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ，

由等面积法可得 $PO = \frac{MP \cdot PQ}{MQ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{22}}{22}$ ，

延长 AD 与 BC 交于点 G ，则 D 为 AG 的中点， G 为直线 AD 与平面 MBC 的交点，



设点 A 到平面 MBC 的距离为 d ，直线 AM 与平面 MBC 所成的角为 θ ，

$$\text{则 } \frac{PO}{d} = \frac{GP}{GA} = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } d = \frac{4}{3}PO = \frac{4}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{22} = \frac{2\sqrt{22}}{11},$$

$$\text{由 } AM=1, \text{ 所以, } \sin \theta = \frac{d}{AM} = \frac{2\sqrt{22}}{11};$$

(2) 假设存在点 M ，使得 $\alpha = \beta$ ，延长 AD 与 BC 交于点 G ，连接 MG ，

则平面 $AMD \cap$ 平面 $MBC = MG$ ，

设 $AR \perp$ 平面 MBC ，垂足为 R ，连接 MR ， $\angle AMR$ 是直线 AM 与平面 MBC 所成的角，

因为 $CD \parallel AB$ 且 $CD = \frac{1}{2}AB$ ，所以，点 D 为 AG 的中点，则 $AG = 2AD = 2\sqrt{2}$ ，

过点 R 作 RT 垂直于 MG ，垂足为 T ，

因为 $AR \perp$ 平面 MBC ， $MG \subset$ 平面 MBC ，所以 $AR \perp MG$ ，

又因为 $RT \perp MG$ ， $AR \cap RT = R$ ， $AR, RT \subset$ 平面 ART ，所以 $MG \perp$ 平面 ART ，因为 $AT \subset$ 平面 ART ，所以 $AT \perp MG$ ，

$\angle ATR$ 是二面角 $A - MG - B$ 的平面角，

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{AR}{AM}, \sin \beta = \frac{AR}{AT},$$

由 $\alpha = \beta$ ，得 $AM = AT$ ，所以 M, T 重合，由 $AT \perp MG$ ，得 $AM \perp MG$ ，

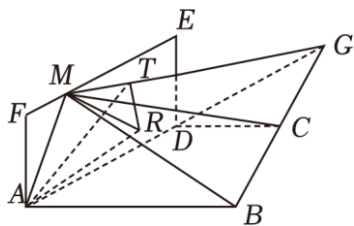
$$\text{设 } FM = x \ (0 \leq x \leq \sqrt{2}), \text{ 则 } AM^2 = x^2 + \frac{1}{2}, \quad GM^2 = (2\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{2},$$

由勾股定理可得 $AM^2 + GM^2 = AG^2$ ，

$$\text{即 } x^2 + \frac{1}{2} + (2\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{2} = 8, \text{ 整理可得 } 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 或 } x = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (舍)},$$

所以存在点 M ，当 $FM = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，有 $\alpha = \beta$ 成立。



20. (12 分) 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$.

(1) 求 C 的右支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数.

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $(-2, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P , 证明: 点 P 在定直线上.

【答案】 (1) 9800

(2) 证明过程见解析.

【分析】 (1) 由题意 $x=2$ 开始求整点通项, 再应用等差数列求和公式计算即可得;

(2) 设出直线方程, 与双曲线方程联立, 然后由点的坐标分别写出直线 MA_1 与 NA_2 的方程, 联立直线方程, 消去 y , 结合韦达定理计算可得 $\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{3}$, 即交点的横坐标为定值, 据此可证得点 P 在定直线 $x = -\frac{1}{2}$ 上.

【解答】 解: (1) 已知双曲线方程为 $C: x^2 - y^2 = 1$,

令 $x=n$, $2 \leq n \leq 99$ 时, 整点时 y 为 $(n-1)^2 < y^2 < n^2 - 1 < n^2$,

整点个数为 $y=2(n-1)+1=2n-1$, $2 \leq n \leq 99$,

则区域内部（不含边界）整点为 $\frac{98(3+197)}{2} = 9800$ 个;

(2) 证明: 由 (1) 知 $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$,

不妨设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

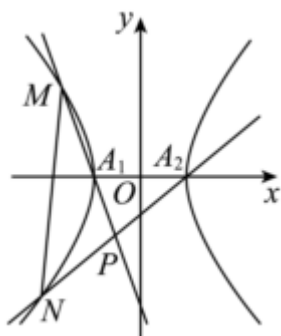
易知直线的斜率不为 0,

不妨设直线 MN 的方程为 $x=my-2$, 且 $-1 < m < 1$,

联立 $\begin{cases} x=my-2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$, 消去 x 并整理得 $(m^2-1)y^2-4my+3=0$,

此时 $\Delta = (-4m)^2 - 4(m^2-1) \times 3 = 4m^2 + 12 > 0$,

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2-1}$, $y_1 y_2 = \frac{3}{m^2-1}$,



所以直线 MA_1 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$ ，直线 NA_2 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1+1}(x+1) \\ y = \frac{y_2}{x_2-1}(x-1) \end{cases},$$

$$\text{可得} \frac{x+1}{x-1} = \frac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)} = \frac{y_2(my_1-1)}{y_1(my_2-3)} = \frac{my_1y_2 - (y_1+y_2) + y_1}{my_1y_2 - 3y_1}$$

$$= \frac{m \cdot \frac{3}{m^2-1} - \frac{4m}{m^2-1} + y_1}{m \times \frac{3}{m^2-1} - 3y_1} = \frac{\frac{-m}{m^2-1} + y_1}{\frac{3m}{m^2-1} - 3y_1} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } x = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } x_P = -\frac{1}{2},$$

故点 P 在定直线 $x = -\frac{1}{2}$ 上运动.

21. (12 分) 某高校数学系计划在周六和周日各举行一次主题不同的心理测试活动，分别由李老师和张老师负责，已知该系共有 n 位学生，每次活动均需该系 k 位学生参加 (n 和 k 都是固定的正整数)，假设李老师和张老师分别将各自活动通知的信息独立、随机地发给该系 k 位学生，且所发信息都能收到，记该系收到李老师或张老师所发活动通知信息的学生人数为 X .

(I) 求该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率；

(II) 求使 $P(X=m)$ 取得最大值的整数 m .

【答案】 见试题解答内容

【分析】 (I) 由题设，两位老师发送信息是独立的，要计算该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率可先计算其对立事件，该生没有接到任一位老师发送的信息的概率，利用概率的性质求解；

(II) 由题意, 要先研究随机变量 X 的取值范围, 由于 $k \leq n$ 故要分两类 $k=n$ 与 $k < n$ 进行研究, $k=n$ 时易求, $k < n$ 时, 要研究出同时接受到两位老师信息的人数, 然后再研究事件所包含的基本事件数, 表示出 $P(X=m)$, 再根据其形式研究它取得最大值的整数 m 即可.

【解答】解: (I) 因为事件 A : “学生甲收到李老师所发信息” 与事件 B : “学生甲收到张老师所发信息” 是相互独立事件, 所以 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立, 由于 $P(A) = P(B) = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}$, 故 $P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = 1 - \frac{k}{n}$,

因此学生甲收到活动信息的概率是 $1 - (1 - \frac{k}{n})^2 = \frac{2kn - k^2}{n^2}$

(II) 当 $k=n$ 时, m 只能取 n , 此时有 $P(X=m) = P(X=n) = 1$

当 $k < n$ 时, 整数 m 满足 $k \leq m \leq t$, 其中 t 是 $2k$ 和 n 中的较小者, 由于 “李老师与张老师各自独立、随机地发送活动信息给 k 位” 所包含的基本事件总数为 $(C_n^k)^2$, 当 $X=m$ 时, 同时收到两位老师所发信息的学生人数为 $2k-m$, 仅收到李老师或张老师转发信息的学生人数为 $m-k$, 由乘法原理知: 事件 $\{X=m\}$ 所包含的基本事件数为 $C_n^k C_k^{2k-m} C_{n-k}^{m-k} = C_n^k C_k^{m-k} C_{n-k}^{m-k}$

$$P(X=m) = \frac{C_n^k C_k^{2k-m} C_{n-k}^{m-k}}{(C_n^k)^2} = \frac{C_k^{2k-m} C_{n-k}^{m-k}}{C_n^k}$$

当 $k \leq m < t$ 时, 由 $P(X=m) \geq P(X=m+1) \Leftrightarrow (m-k+1)^2 \leq (n-m)(2k-m) \Leftrightarrow m \geq 2k - \frac{(k+1)^2}{n+2}$

由 $P(X=m) \geq P(X=m-1) \Leftrightarrow (n-m+1)(2k-m+1) \geq (m-k)^2 \Leftrightarrow m \leq 2k+1 - \frac{(k+1)^2}{n+2}$,

$\therefore P(X=m)$ 取到最大值时, m 满足 $2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} \leq m \leq 2k+1 - \frac{(k+1)^2}{n+2}$,

假如 $k \leq 2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} < t$ 成立, 则当 $(k+1)^2$ 能被 $n+2$ 整除时,

$P(X=M)$ 在 $m = 2k - \frac{(k+1)^2}{n+2}$ 和 $m = 2k+1 - \frac{(k+1)^2}{n+2}$ 处达到最大值;

当 $(k+1)^2$ 不能被 $n+2$ 整除时, $P(X=M)$ 在 $m = 2k - [\frac{(k+1)^2}{n+2}]$ 处达到最大值 (注: $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数),

下面证明 $k \leq 2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} < t$

因为 $1 \leq k < n$, 所以 $2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} - k = \frac{kn - k^2 - 1}{n+2} \geq \frac{k(k+1) - k^2 - 1}{n+2} = \frac{k-1}{n+2} \geq 0$

而 $2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} - n = \frac{(n-k+1)^2}{n+2} > 0$, 故 $2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} < n$, 显然 $2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} < 2k$

因此 $k \leq 2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} < t$

综上得, 符合条件的 $m \leq 2k - [\frac{(k+1)^2}{n+2}]$

22. (12 分) 设 $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1} + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, a, b 为常数), 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$

在 $(0, 0)$ 点相切.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 证明: 当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) < \frac{9x}{x+6}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】(I) 由 $y=f(x)$ 过 $(0, 0)$, 可求 b 的值, 根据曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在 $(0, 0)$ 点相切,

利用导函数, 可求 a 的值;

(II) 由 (I) 知 $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1} - 1$, 由均值不等式, 可得 $\sqrt{x+1} < \frac{x}{2} + 1$, 构造函数 $k(x) = \ln(x+1) - x$, 可得 $\ln(x+1) < x$, 从而当 $x > 0$ 时, $f(x) < \frac{3}{2}x$, 记 $h(x) = (x+6)f(x) - 9x$,

可证 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递减, 从而 $h(x) < 0$, 故问题得证.

【解答】(I) 解: 由 $y=f(x)$ 过 $(0, 0)$, $\therefore f(0) = 0$, $\therefore b = -1$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在 $(0, 0)$ 点相切.

$$\therefore y'|_{x=0} = (\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + a)|_{x=0} = \frac{3}{2} + a = \frac{3}{2}$$

$\therefore a = 0$;

(II) 证明: 由 (I) 知 $f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1} - 1$

由均值不等式, 当 $x > 0$ 时, $2\sqrt{(x+1) \cdot 1} < x+1+1=x+2$, $\therefore \sqrt{x+1} < \frac{x}{2} + 1$ ①

令 $k(x) = \ln(x+1) - x$, 则 $k(0) = 0$, $k'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0$, $\therefore k(x) < 0$

$\therefore \ln(x+1) < x$, ②

由①②得, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < \frac{3}{2}x$

记 $h(x) = (x+6)f(x) - 9x$, 则当 $0 < x < 2$ 时, $h'(x) = f(x) + (x+6)f'(x) - 9$

$$< \frac{3}{2}x + (x+6)(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}) - 9 < \frac{1}{2(x+1)} [3x(x+1) + (x+6)(3 + \frac{x}{2}) - 18(x+1)]$$

$$=\frac{x}{4(x+1)}(7x-18)<0$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递减, 又 $h(0)=0$, $\therefore h(x)<0$

$\therefore$ 当 $0<x<2$ 时, $f(x)<\frac{9x}{x+6}$.