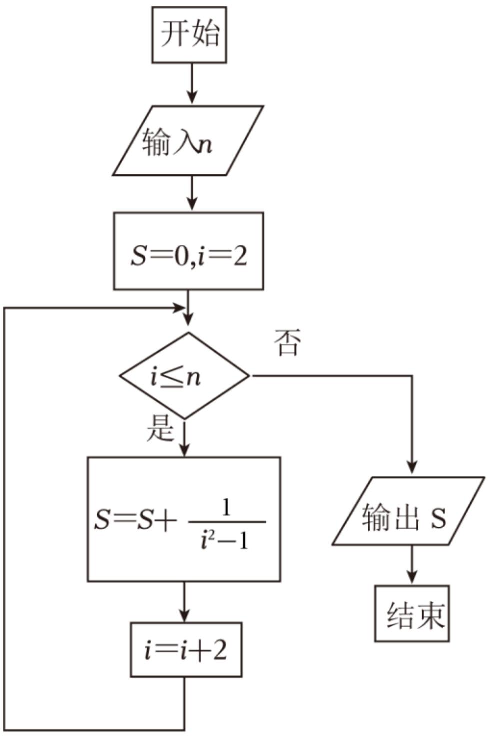
2019年江苏省泰州市高港区口岸中学高考数学四模试卷

一、填空题（共14小题，每小题5分，满分70分）

1.（5分）设集合 $A=\{x|-1<x<8\}$，$B=\{x|5<2x<17\}$，则 $A\cap B$ 中为整数的元素的个数是 ______.

2.（5分）i 为虚数单位，若复数（$1+mi$）$\cdot i$ 的共轭复数为 $1-i$，则实数 $m=$______.

3.（5分）如图的框图，运行相应的程序，若输入 n 的值为4，则输出 S 的值为 ______.



4.（5分）样本数据2，2，3，a 的均值为3，则这组数据的方差为 ______.

5.（5分）命题"$\exists x>0$，$x^2+\cos x\leqslant -1$"的否定是 ______.

6.（5分）函数$y=\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)$的最小正周期 $T=$______.

7.（5分）已知长方体的长、宽、高分别为2，1，2，则该长方体外接球的表面积为______.

8.（5分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$，若 $f(m)>1$，则实数 m 的取值范围是______.

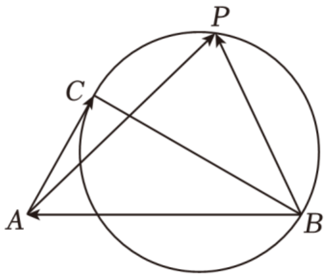
9.（5分）江苏省即将实施新高考"3+1+2"模式，其中"2"是指：从政治、地理、化学、生物中四选二．小明与小芳对这四科的选择没有偏好，则两人所选两科都不相同的概率为 ______.

10.（5分）直线 l 是圆 $x^2+y^2=4$ 在$(-1,\sqrt{3})$处的切线，点 P 是圆 $x^2-4x+y^2+3=0$ 上的动点，则点 P 到直线 l 的距离的最小值等于 ______.

11.（5分）设 F_2 是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右焦点，$O$ 为坐标原点，过 F_2 的直线交双

曲线的右支于点 P、N，直线 PO 交双曲线 C 于另一点 M，若$|MF_2|=3|PF_2|$，且$\angle MF_2N=60°$，则双曲线 C 的离心率为 ______________________.

12．（5 分）如图，在直角△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=60°$，$AB=4$．以 BC 为直径向△ABC 外作半圆，点 P 在半圆弧$\overset{\frown}{BC}$上，且满足$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}=6$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$的值为 _______.



13．（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=2^n(n\in N^*)$，且 $a_1=1$，设$b_n=a_n-15n+1\ (n\in N^*)$，则数列$\{b_n\}$中的最小项的值为__________.

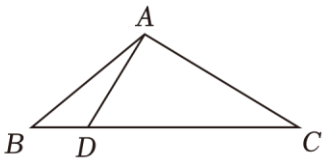
14．（5 分）已知函数$f(x)=\frac{(x-b)^2-\ln x}{x}(b\in R)$．若存在 $x\in[1,2]$，使得$\frac{f(x)}{x}>-f'(x)$，则实数 b 的取值范围是______________________.

二、解答题：本大题共 8 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（14 分）△ABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且满足$a^2+c^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}ac=b^2$.

（1）求 $\sin B$ 的值；

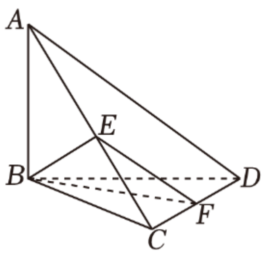
（2）如图，若 $A=2B$，D 是边 BC 上一点，$AD\perp AC$，且 $AD=6$，求边 BD 的长．



16．（14 分）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，$BE\perp AC$，点 F 是 CD 的中点，$EF=3$，$BF=5$．求证：

（1）$EF\parallel$平面 ABD；

（2）平面 $ABC\perp$平面 ADC.

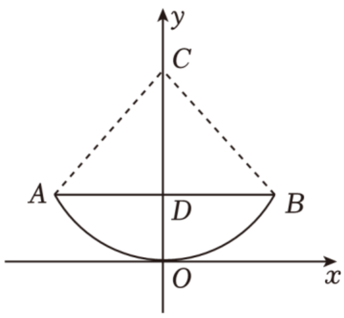


17．（14 分）江苏省第十九届运动会推出一系列纪念品，其中一个工艺品需要设计成如图所示的一个结构（该图为轴对称图形），其中支撑杆 AB、CD，满足 $AB+CD=3$，设 AB 边的长为 $2t$（$1\leqslant t\leqslant \frac{3}{2}$）．在如图所示的平面直角坐标系中，支撑杆曲线 AOB 拟从以下两种曲线中选择一种：

曲线 C_1 是一段余弦曲线，其表达式为 $y=1-\cos x$，记结构的最低点 O 到点 C 的距离为 h_1（t）；曲线 C_2 是抛物线 $y=\frac{4}{9}x^2$ 的一段，此时记结构的最低点 O 到点 C 的距离为 h_2（t）.

（1）求函数 h_1（t），h_2（t）的表达式；

（2）要使得点 O 到点 C 的距离最大，应选用哪一种曲线？此时最大值是多少？（参考数据 $\cos 1=0.54$）



18．（16 分）数列$\{a_n\}$是等比数列，公比 $q>0$，前 n 项和 S_n（$n\in\mathbf{N}^*$），$\{b_n\}$是等差数列，

已知 $a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_2}+4$，$a_3=\frac{1}{b_4+b_6}$，$a_4=\frac{1}{b_5+2b_7}$.

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式 a_n，b_n；

（2）设$\{S_n\}$的前 n 项和为 T_n（$n\in\mathbf{N}^*$），

①求 T_n；

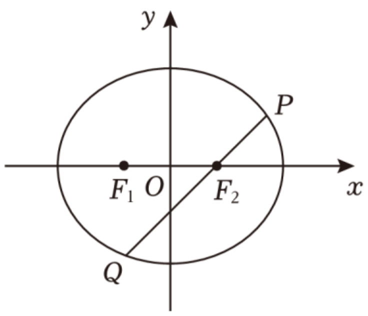
②证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(T_{i+1}-b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}<\frac{1}{2}$.

19．（16 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\frac{1}{2}$，P 是椭圆 C 上的一个动点，且$\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为$\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设斜率为 1 的直线 PF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 Q，求$\triangle OPQ$ 的面积；

（3）过椭圆右顶点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B（B 不在 x 轴上），垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴交于点 H，若 $F_2B\perp F_2H$，且$|MA|\leqslant|MO|$，求直线 l 的斜率的取值范围.



20．（16 分）已知函数 f（x）$=e^x$（e^x-ax+a）．

（1）若函数 f（x）在（$-\infty$，$+\infty$）上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 f（x）有两个极值点 x_1，x_2：

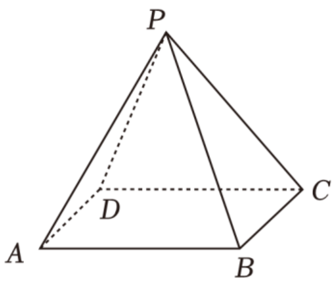
①求实数 a 的取值范围；

②求证：$(x_1-\frac{1}{2})\cdot(x_2-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}$.

21．（10 分）已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长和高都为 2．现从该棱锥的 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，设随机变量 X 表示所得三角形的面积．

（1）求概率 P（$X=2$）的值；

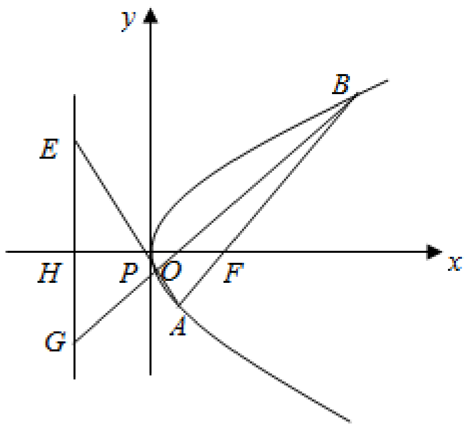
（2）求随机变量 X 的概率分布及其数学期望 E（X）.



22．（10 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，过 F 且斜率为$\frac{4}{3}$的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，B 在 x 轴的上方，且点 B 的横坐标为 4．

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）设点 P 为抛物线 C 上异于 A，B 的点，直线 PA 与 PB 分别交抛物线 C 的准线于 E，G 两点，x 轴与准线的交点为 H，求证：$HG\cdot HE$ 为定值，并求出定值．



【选做题】本题包括 23、24、25 三小题，请选定其中两题，并在答题卡相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

23．（10 分）已知 1 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的一个特征值，求点（1，2）在矩阵 *A* 对应的变换作用下得到的点的坐标．

24．（10 分）已知曲线 *C* 的极坐标方程为 ρ＝2sinθ．以极点为原点，极轴为 *x* 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，直线 *l* 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+2 \end{cases}$（*t* 为参数）．

（1）求曲线 *C* 的直角坐标方程和直线 *l* 的普通方程；

（2）求直线 *l* 被曲线 *C* 所截得的弦长．

25．已知关于 *x* 的不等式 $x^2-mx+n<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，其中 *m*，$n\in\mathbf{R}$．求证：$(m-1)\sqrt{x-3}+(n-1)\sqrt{4-x}\leqslant\sqrt{5}$．

2019年江苏省泰州市高港区口岸中学高考数学四模试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（共14小题，每小题5分，满分70分）

1．（5分）设集合 $A=\{x|-1<x<8\}$，$B=\{x|5<2x<17\}$，则 $A\cap B$ 中为整数的元素的个数是 $\underline{\quad 4 \quad}$．

【答案】4．

【分析】先求出集合 A 与 B 的交集，即可求解．

【解答】解：因为 $A=\{x|-1<x<8\}$，$B=\{x|5<2x<17\}=\{x|\frac{5}{2}<x<8\}$，

则 $A\cap B=\{x|\frac{5}{2}<x<8\}$，

故 $\cap B$ 中为整数的元素有3，4，5，6，7共4个．

故答案为：4．

2．（5分）i 为虚数单位，若复数（$1+mi$）$\bullet i$ 的共轭复数为 $1-i$，则实数 $m=\underline{\quad -1 \quad}$．

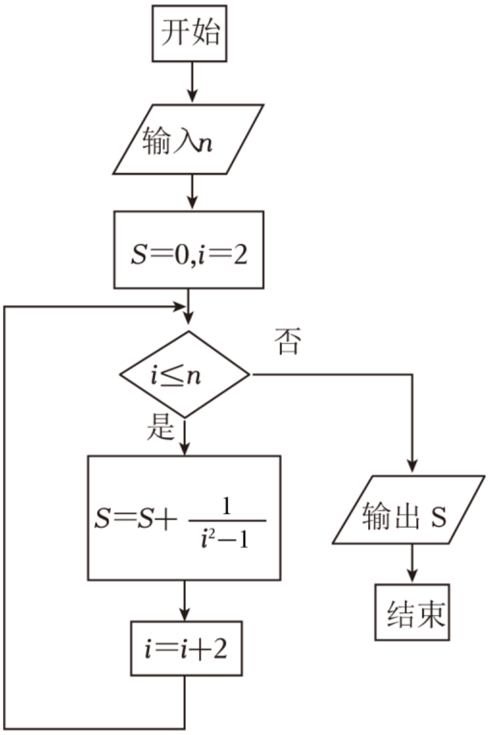
【答案】-1．

【分析】根据共轭复数的定义列方程，求出 m．

【解答】解：由题意，（$1+mi$）$\bullet i=1+i$，解得 $m=-1$．

故答案为：-1．

3．（5分）如图的框图，运行相应的程序，若输入 n 的值为4，则输出 S 的值为 $\underline{\quad \frac{2}{5} \quad}$．



【答案】$\frac{2}{5}$.

【分析】每次进入循环体后，S 的值被施加的运算是$S=S+\frac{1}{i^2-1}$，故由此运算规律进行计算，当 $i=6$ 不满足条件 $i\leqslant 4$ 退出循环，输出 S 的值即可．

【解答】解：由题意，模拟执行程序，可得：$n=4$，$i=2$，$S=0$，

满足条件 $i\leqslant 4$，$S=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，$i=4$，

满足条件 $i\leqslant 4$，$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$，$i=6$，

不满足条件 $i\leqslant 4$ 退出循环，输出 S 的值为$\frac{2}{5}$.

故答案为：$\frac{2}{5}$.

4．（5 分）样本数据 2，2，3，a 的均值为 3，则这组数据的方差为 <u>1.5</u>．

【答案】1.5.

【分析】利用平均数公式先求出 a，再利用方差公式求解．

【解答】解：∵样本数据 2，2，3，a 的均值为 3，

∴$\frac{1}{4}$（2+2+3+a）=3，

解得 $a=5$，

则这组数据的方差为：

$S^2=\frac{1}{4}[(2-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2]=1.5$.

故答案为：1.5．

5．（5 分）命题“$\exists x>0$，$x^2+\cos x\leqslant -1$”的否定是 $\underline{\ \forall x>0，x^2+\cos x>-1\ }$．

【答案】$\forall x>0$，$x^2+\cos x>-1$．

【分析】结合含有量词的命题的否定即可求解．

【解答】解：命题“$\exists x>0$，$x^2+\cos x\leqslant -1$”的否定是“$\forall x>0$，$x^2+\cos x>-1$”．

故答案为：$\forall x>0$，$x^2+\cos x>-1$．

6．（5 分）函数 $y=\tan(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8})$ 的最小正周期 $T=\underline{\ 2\pi\ }$．

【答案】2π．

【分析】利用正切函数的周期公式计算即可．

【解答】解：$y=\tan(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8})$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$．

故答案为：2π．

7．（5 分）已知长方体的长、宽、高分别为 2，1，2，则该长方体外接球的表面积为 $\underline{\ 9\pi\ }$．

【答案】见试题解答内容

【分析】由已知求得长方体的对角线长，得到外接球的半径，代入球的表面积公式得答案．

【解答】解：由已知可得，长方体的对角线长为 $\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，

则长方体外接球的半径 $r=\frac{3}{2}$．

∴长方体外接球的表面积为 $4\pi\times r^2=4\pi\times(\frac{3}{2})^2=9\pi$．

故答案为：9π．

8．（5 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$，若 $f(m)>1$，则实数 m 的取值范围是 $\underline{\ (-\infty，0)\cup(e，+\infty)\ }$．

【答案】见试题解答内容

【分析】由分段函数的解析式，讨论 $m\geqslant 1$，$m<1$，再由对数函数的单调性，解不等式，求并集即可得到．

【解答】解：函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$，

当 $m\geqslant 1$，f（m）>1，即为 $lnm>1$，

解得 $e<m$；

当 $m<1$，f（m）>1 即为 $1-m>1$，

解得 $m<0$．

综上可得，$m<0$ 或 $1<m$．

故答案为：$(-\infty，0)\cup(e，+\infty)$．

9．（5 分）江苏省即将实施新高考“3+1+2”模式，其中“2”是指：从政治、地理、化学、生物中四选二．小明与小芳对这四科的选择没有偏好，则两人所选两科都不相同的概率为 $\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$．

【答案】$\frac{1}{6}$．

【分析】本题根据古典概率模型公式即可得出答案．

【解答】解：小明与小芳从政治、地理、化学、生物中四选二，

所有可能为 $C_4^2C_4^2=36$ 种，

则两人所选两科都不相同的可能为 $C_4^2C_2^2=6$ 种，

设事件 $A=$“两人所选两科都不相同”，

$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$．

故答案为：$\frac{1}{6}$．

10．（5 分）直线 l 是圆 $x^2+y^2=4$ 在 $(-1,\sqrt{3})$ 处的切线，点 P 是圆 $x^2-4x+y^2+3=0$ 上的动点，则点 P 到直线 l 的距离的最小值等于 $\underline{\quad 2\quad}$．

【答案】2．

【分析】根据直线的点斜式方程，圆的几何性质，即可求解．

【解答】解：∵直线 l 是圆 $x^2+y^2=4$ 在 $(-1,\sqrt{3})$ 处的切线，

∴直线 l 的方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$，即 $x-\sqrt{3}y+4=0$，

又圆 C：$x^2-4x+y^2+3=0$ 的圆心 C（2，0），半径 $r=1$，

∵点 P 是圆 C：$x^2-4x+y^2+3=0$ 上的动点，

又圆心 C（2，0）到直线 l 的距离 $d=\frac{6}{\sqrt{1+3}}=3$，

∴P 到直线 l 的距离的最小值等于 $d-r=3-1=2$．

故答案为：2．

11．（5 分）设 F_2 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，过 F_2 的直线交双曲线的右支于点 P、N，直线 PO 交双曲线 C 于另一点 M，若 $|MF_2|=3|PF_2|$，且 $\angle MF_2N=60^\circ$，则双曲线 C 的离心率为 ＿$\frac{\sqrt{7}}{2}$＿．

【答案】$\frac{\sqrt{7}}{2}$.

【分析】由题意画出图形，由已知结合双曲线的定义求解 $|MF_1|$，$|MF_2|$，再由余弦定理列式求解双曲线 C 的离心率．

【解答】解：设双曲线的左焦点为 F_1，如图所示，

由双曲线的对称性可知四边形 MF_2PF_1 为平行四边形，

$\therefore |MF_1|=|PF_2|$，$MF_1 \parallel PN$，

而 $|MF_2|=3|PF_2|$，$\therefore |MF_2|=3|MF_1|$，

由双曲线的定义可知，$|MF_2|-|MF_1|=2a$，

$\therefore |MF_2|=3a$，$|MF_1|=a$，

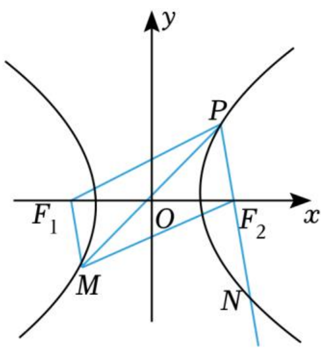
$\because \angle MF_2N=60^\circ$，$\therefore \angle F_1MF_2=60^\circ$，

在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理知，$\cos\angle F_1MF_2=\frac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1||MF_2|}$，

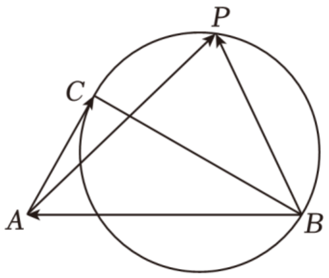
即 $\frac{1}{2}=\frac{a^2+9a^2-4c^2}{2\cdot a\cdot 3a}$，化简得 $4c^2=7a^2$，

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$（负值舍去）．

故答案为：$\frac{\sqrt{7}}{2}$.



12．（5 分）如图，在直角△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=4$．以 BC 为直径向△ABC 外作半圆，点 P 在半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，且满足 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}=6$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的值为 ＿7＿．



【答案】见试题解答内容

【分析】设 BC 为直径的圆交 AB 于 D，则$\angle ABC=30^\circ$，以 D 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，求出相关点的坐标，利用向量的数量积转化求解即可．

【解答】解：$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=4$，

所以，$AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle BDC=90^\circ$，

设 BC 为直径的圆交 AB 于 D，则$\angle ABC=30^\circ$，

以 D 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，

则 $CD=\sqrt{3}$，$BD=3$，$AD=1$，

A（-1，0），B（3，0），C（0，$\sqrt{3}$），设 P（x，y），

$\overrightarrow{BP}=(x-3,\ y)$，$\overrightarrow{BA}=(-4,\ 0)$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}=-4x+12=6$，解得：$x=\dfrac{3}{2}$，

又 BC 为直角，所以，$\angle BPC=90^\circ$，

所以，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

即$\left(-\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}-y\right)\left(\dfrac{3}{2},\ -y\right)=0$，

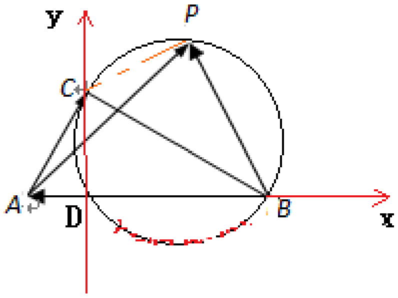
即 $y^2-\sqrt{3}y-\dfrac{9}{4}=0$，解得：$y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以，P（$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$），$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=(1,\ \sqrt{3})\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{2}$

$=7$

故答案为：7．



13.（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=2^n(n\in N^*)$，且$a_1=1$，设$b_n=a_n-15n+1\ (n\in N^*)$，则数列$\{b_n\}$中的最小项的值为__ - 44 __.

【答案】见试题解答内容

【分析】利用累加法求数列$\{a_n\}$的通项公式，代入$b_n=a_n-15n+1\ (n\in N^*)$，整理后利用数列的函数特性求解.

【解答】解：由$a_{n+1}-a_n=2^n(n\in N^*)$，且$a_1=1$，

得$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

$\therefore b_n=a_n-15n+1=2^n-15n$.

当$n=1$时，$b_1=-13$；

当$n=2$时，$b_2=-26$；

当$n=3$时，$b_3=-37$；

当$n=4$时，$b_4=-44$；

当$n=5$时，$b_5=-43$；

当$n\geqslant5$时，函数$b_n=2^n-15n$单调递增.

∴数列$\{b_n\}$中的最小项的值为 - 44.

故答案为： - 44.

14.（5 分）已知函数$f(x)=\frac{(x-b)^2-\ln x}{x}(b\in R)$．若存在$x\in[1,2]$，使得$\frac{f(x)}{x}>-f'(x)$，则实数$b$的取值范围是__$(-\infty,\frac{7}{4})$__.

【答案】见试题解答内容

【分析】由$\frac{f(x)}{x}>-f'(x)$，得$f(x)+xf'(x)>0$，求原函数的导函数，代入$f(x)+xf'(x)>0$，得到存在$x\in[1,2]$，使得$2x(x-b)-1>0$，分离参数b，再由函数单调性求最值得答案.

【解答】解：$\because f(x)=\frac{(x-b)^2-\ln x}{x}$，$x>0$，

$\therefore f'(x)=\frac{2x(x-b)-1-(x-b)^2+\ln x}{x^2}$，

$\therefore f(x)+xf'(x)=\frac{(x-b)^2-\ln x}{x}+\frac{2x(x-b)-1-(x-b)^2+\ln x}{x}$

$=\dfrac{2x(x-b)-1}{x}$,

∵存在 $x\in[1，2]$，使得 $\dfrac{f(x)}{x}>-f'(x)$，即 $f(x)+xf'(x)>0$，

∴$2x(x-b)-1>0$，

∴$b<x-\dfrac{1}{2x}$，

设 $g(x)=x-\dfrac{1}{2x}$，

∴$b<g(x)_{max}$，

∴$g(x)=x-\dfrac{1}{2x}$在[1，2]上为增函数，

∴$g(x)_{max}=g(2)=\dfrac{7}{4}$.

∴$b<\dfrac{7}{4}$.

实数 b 的取值范围是 $(-\infty，\dfrac{7}{4})$.

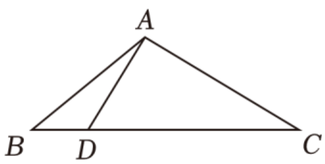
故答案为：$(-\infty，\dfrac{7}{4})$.

二、解答题：本大题共 8 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（14 分）△ABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且满足 $a^2+c^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ac=b^2$.

（1）求 $\sin B$ 的值；

（2）如图，若 $A=2B$，D 是边 BC 上一点，$AD\perp AC$，且 $AD=6$，求边 BD 的长．



【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

（2）$\sqrt{6}$.

【分析】（1）根据余弦定理求出 $\cos B$ 的值，结合角 $B\in(0，\pi)$，利用同角三角函数的关系求得 $\sin B$ 的值；

（2）利用二倍角公式求得 $\sin A$、$\cos A$ 的值，然后根据诱导公式、同角三角函数基本关系式求出的值，在△ABD 中，由正弦定理可求 $BD=\sqrt{6}$，又 $\sin\angle ADC=\sin(B+\angle BAD)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，根据三角形的面积公式即可计算得解．

【解答】解：（1）因为 $a^2+c^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}ac=b^2$，所以由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

结合 $B\in(0,\pi)$，可得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

（2）因为 $A=2B$，所以 $\sin A=2\sin B\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos A=2\cos^2 B-1=-\frac{1}{3}$，

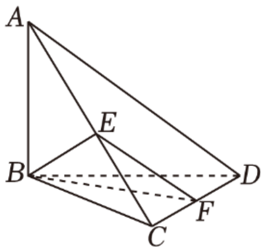
因为 $AD\perp AC$，可得 $\sin\angle BAD=\sin(\angle BAC-\frac{\pi}{2})=-\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，

所以在△ABD 中，由 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，即 $\frac{6}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{BD}{\frac{1}{3}}$，解得 $BD=\sqrt{6}$.

16.（14 分）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，$BE\perp AC$，点 F 是 CD 的中点，$EF=3$，$BF=5$．求证：

（1）EF∥平面 ABD；

（2）平面 $ABC\perp$平面 ADC.



【答案】见试题解答内容

【分析】（1）由等腰三角形以及中位线的性质证明 EF∥AD，即可证明 EF∥平面 ABD；

（2）由等腰直角三角形的性质和勾股定理，证明 $BE\perp EF$，

再由 $BE\perp AC$，得出 $BE\perp$平面 ACD，从而证明平面 $ABC\perp$平面 ADC.

【解答】证明：（1）△ABC 中，因为 $AB=BC$，$BE\perp AC$，

所以 E 为 AC 的中点；

又因为点 F 是 CD 的中点，

所以 EF∥AD；

又 $AD\subset$平面 ABD，$EF\not\subset$平面 ABD，

所以 EF∥平面 ABD；

（2）在 Rt△ABC 中，因为 $AB=BC=4\sqrt{2}$，

所以 $AC=8$；

又因为 $AE=CE$，

所以 $BE=4$；

又因为 $EF=3$，$BF=5$，

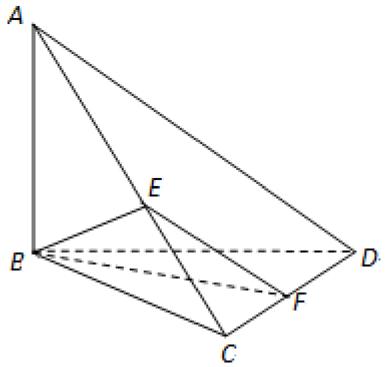
所以 $BF^2=BE^2+EF^2$，即 $BE\perp EF$；

又因为 $BE\perp AC$，$AC\subset$平面 ACD，$EF\subset$平面 ACD，$AC\cap EF=E$，

所以 $BE\perp$平面 ACD，

又因为 $BE\subset$平面 ABC，

所以平面 $ABC\perp$平面 ADC.

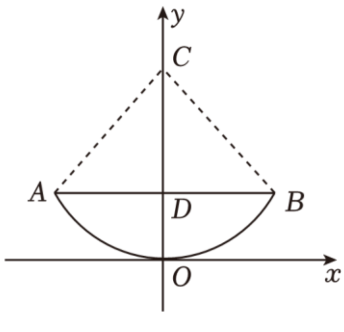


17.（14 分）江苏省第十九届运动会推出一系列纪念品，其中一个工艺品需要设计成如图所示的一个结构（该图为轴对称图形），其中支撑杆 AB、CD，满足 $AB+CD=3$，设 AB 边的长为 $2t$（$1\leqslant t\leqslant \frac{3}{2}$）．在如图所示的平面直角坐标系中，支撑杆曲线 AOB 拟从以下两种曲线中选择一种：

曲线 C_1 是一段余弦曲线，其表达式为 $y=1-\cos x$，记结构的最低点 O 到点 C 的距离为 h_1（t）；曲线 C_2 是抛物线 $y=\frac{4}{9}x^2$的一段，此时记结构的最低点 O 到点 C 的距离为 h_2（t）.

（1）求函数 h_1（t），h_2（t）的表达式；

（2）要使得点 O 到点 C 的距离最大，应选用哪一种曲线？此时最大值是多少？（参考数据 $\cos1=0.54$）



【答案】（1）h_1（x）$=-2t-\cos t+4$（$1\leqslant t\leqslant 1.5$）；$h_2(x)=\frac{4}{9}t^2-2t+3$，（$1\leqslant t\leqslant 1.5$）；

（2）选用曲线 C_1，最大值为 $2-\cos1$.

【分析】（1）对于曲线 C_1，求得点 B 的坐标，点 O 到 AB 的距离，以及 $DC=3-2t$，由已知求得 h_1（t）；对于曲线 C_2：$y=\frac{4}{9}x^2$，求得点 B 的坐标，点 O 到 AB 的距离，由已知定义可求得 h_2（t）；

（2）求导函数，利用导函数研究函数 h_1（t）在[1，1.5]上的单调性，可得出其最大值，由二次函数的性质求得 h_2（t）的最大值，比较大小可得结论．

【解答】解：（1）对于曲线 C_1，因为曲线 AOB 的表达式为 $y=1-\cos x$，所以点 B 的坐标为（t，$1-\cos t$），所以点 O 到 AB 的距离为 $1-\cos t$，

因为 $DC=3-2t$，所以 h_1（t）＝（$3-2t$）+（$1-\cos t$）＝$-2t-\cos t44$（$1\leqslant t\leqslant 1.5$）；

对于曲线 C_2：$y=\frac{4}{9}x^2$，则点 B 的坐标为 $(t,\ \frac{4}{9}t^2)$，所以点 O 到 AB 的距离为$\frac{4}{9}t^2$，

因为 $DC=3-2t$，所以$h_2(t)=\frac{4}{9}t^2-2t+3\ (1\leqslant t\leqslant 1.5)$．

（2）因为 h_1'（t）＝$-2+\sin t<0$，所以 h_1（t）在[1，1.5]上单调递减，所以当 $t=1$ 时，h_1（t）取得最大值 $2-\cos 1$，

因为$h_2(t)=\frac{4}{9}(t-\frac{9}{4})^2+\frac{3}{4}$，（$1\leqslant t\leqslant 1.5$），所以当 $t=1$ 时，h_2（t）取得最大值为$\frac{13}{9}$，

因为$2-\cos 1=1.46>\frac{13}{9}$，所以选用曲线 C_1，且当 $t=1$ 时，点 O 到点 C 的距离最大，最大值为 $2-\cos 1$．

18．（16 分）数列$\{a_n\}$是等比数列，公比 $q>0$，前 n 项和 S_n（$n\in\mathbf{N}^*$），$\{b_n\}$是等差数列，

已知$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_2}+4$，$a_3=\frac{1}{b_4+b_6}$，$a_4=\frac{1}{b_5+2b_7}$．

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式 a_n，b_n；

（2）设$\{S_n\}$的前 n 项和为 T_n（$n\in\mathbf{N}^*$），

①求 T_n；

②证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(T_{i+1}-b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}<\frac{1}{2}$．

【答案】（1）$a_n=\frac{1}{2^n}$，$b_n=n-1$；

（2）①$n-1+\frac{1}{2^n}$；

②证明见解析．

【分析】（1）由等比数列$\{a_n\}$的公比 $q>0$，则根据已知条件$\begin{cases}a_1=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{a_1q^2}=\frac{1}{a_1q}+4,\end{cases}$解得 $q=\frac{1}{2}$，即可求出 a_n，设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d，由$\begin{cases}a_3=\frac{1}{b_4+b_6}=\frac{1}{8},\\ a_4=\frac{1}{b_5+2b_7}=\frac{1}{16},\end{cases}$求出 $b_1=0$，$d=1$，即可求出 $b_n=n-1$；

（2）①由等比数列前 n 项和公式，可求出 $S_n=1-\frac{1}{2^n}$，然后利用分组求和求出 $T_n=n-1+\frac{1}{2^n}$；

②利用 T_n 和 b_n 的通项公式，计算 $\frac{(T_{i+1}-b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=\frac{1}{i\cdot 2^i}-\frac{1}{(i+1)\cdot 2^{i+1}}$，利用裂项相消法求和即可证得结论.

【解答】解：（1）设数列$\{a_n\}$的公比为 q（$q>0$），

依题意，可得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{a_1q^2}=\frac{1}{a_1q}+4,\end{cases}$ 解得 $q=-1$（舍）或 $q=\frac{1}{2}$，

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2^n}$，

设数列$\{b_n\}$的公差为 d，

则$\begin{cases}\frac{1}{8}=\frac{1}{2b_1+8d}, \\ \frac{1}{16}=\frac{1}{3b_1+16d}.\end{cases}$ 即$\begin{cases}b_1+4d=4, \\ 3b_1+16d=16,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b_1=0, \\ d=1,\end{cases}$

$\therefore b_n=n-1$；

（2）①$\because S_n$ 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，

$\therefore S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，

数列$\{S_n\}$的前 n 项和 $T_n=(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2^2})+\cdots+(1-\frac{1}{2^n})=n-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})$

$=n-(1-\frac{1}{2^n})=n-1+\frac{1}{2^n}$；

②证明：由题 $\frac{(T_{i+1}-b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=\frac{(i+\frac{1}{2^{i+1}}-i)(i+2)}{i(i+1)}$

$=\frac{i+2}{i(i+1)\cdot 2^{i+1}}=\frac{1}{i\cdot 2^i}-\frac{1}{(i+1)2^{i+1}}$，

$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{(T_{i+1}-b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=(\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{2\cdot 2^2})+(\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3})+\cdots+[\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}]$

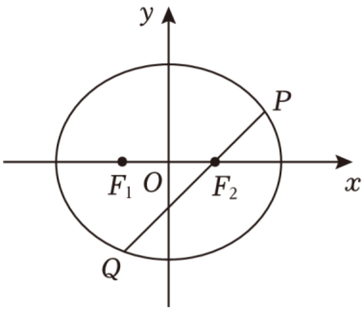
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}<\frac{1}{2}$.

19．（16 分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\frac{1}{2}$，P 是椭圆 C 上的一个动点，且△PF_1F_2 面积的最大值为$\sqrt{3}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设斜率为 1 的直线 PF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 Q，求△OPQ 的面积；

（3）过椭圆右顶点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B（B 不在 x 轴上），垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴交于点 H，若 $F_2B\perp F_2H$，且$|MA|\leqslant|MO|$，求直线 l 的斜率的取值范围．



【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）$\frac{6\sqrt{2}}{7}$；

（3）$(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{4}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{4},+\infty)$．

【分析】（1）根据题意列方程即可求解；

（2）设 l_{PQ}：$y=x-1$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立方程，由韦达定理可得$x_1+x_2=\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$，利用弦长公式可求得$|PQ|$，利用点到直线的距离公式可得△OPQ 的高，再利用三角形面积公式即可求解；

（3）由已知设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$(k\neq0)$，联立直线方程和椭圆方程，化为关于 x 的一元二次方程，利用根与系数的关系求得 B 的坐标，再写出 MH 所在直线方程，求出 H 的坐标，由 $BF_2\perp HF_2$，得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=\frac{4k^2-9}{4k^2+3}+\frac{12ky_H}{4k^2+3}=0$，解出$y_H=\frac{9-4k^2}{12k}$，直线 MH 的方程为$y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}$与 l 联立消去 y，解得$x_M=\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}$，又根据$|MA|\leqslant|MO|$，则有 $x_M\geqslant1$，转化为关于 k 的不等式求得 k 的范围．

【解答】解：（1）由题可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\cdot b\cdot 2c=\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，

解得：$c^2=1$，$a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由（1）知 F_2（1，0），

所以 l_{PQ}：$y=x-1$，设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），

联立方程$\begin{cases}y=x-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y 化简得 $7x^2-8x-8=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$，

则$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(\frac{8}{7})^2-4\times(-\frac{8}{7})}=\frac{24}{7}$，

又原点 O 到直线 $y=x-1$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{24}{7}=\frac{6\sqrt{2}}{7}$；

（3）设直线 l 的斜率为 k（$k\neq0$），则直线 l 的方程为 $y=k$（$x-2$），设 B（x_B，y_B），

由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，整理得（$4k^2+3$）$x^2-16k^2x+16k^2-12=0$，

解得 $x=2$，或 $x=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，由题意得 $x_B=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，

从而 $y_B=\frac{-12k}{4k^2+3}$，

由（1）知，F_2（1，0），设 H（0，y_H），

有$\overrightarrow{F_2H}=(-1,\ y_H)$，$\overrightarrow{BF_2}=(\frac{9-4k^2}{4k^2+3},\ \frac{12k}{4k^2+3})$，

由 $BF_2\perp HF_2$，得$\overrightarrow{BF_2}\cdot\overrightarrow{HF_2}=\frac{4k^2-9}{4k^2+3}+\frac{12ky_H}{4k^2+3}=0$，解得 $y_H=\frac{9-4k^2}{12k}$，

因此直线 MH 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}$，设 M（x_M，y_M），

由方程组 $\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12}\\y=k(x-2)\end{cases}$，消去 y 解得 $x_M=\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}$，

因为$|MA|\leqslant|MO|$，即 $(x_M-2)^2+y_M^2\leqslant x_M^2+y_M^2$，

化简得 $x_M\geqslant1$，即 $x_M=\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}\geqslant1$，解得 $k\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $k\geqslant\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以直线 l 的斜率的取值范围为 $(-\infty,\ -\frac{\sqrt{6}}{4}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{4},\ +\infty)$．

20．（16 分）已知函数 $f(x)=e^x(e^x-ax+a)$．

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2：

①求实数 a 的取值范围；

②求证：$(x_1-\frac{1}{2})\cdot(x_2-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}$．

【答案】（1）$(0，2e]$；

（2）①（$2e$，$+\infty$）；

②证明见解析．

【分析】（1）求导，构造函数 $g(x)=2e^x-ax$，分 $a\leqslant0$ 和 $a>0$ 讨论，分别判断导数的符号，即可求出结果；

（2）①根据（1）可知，$f'(x)$ 有两个零点，转化为 $g(x)$ 有两个零点，根据零点存在定理即可求出结果；

②不妨设 $0<x_1<1<x_2$，且 $\begin{cases}2e^{x_1}=ax_1\\2e^{x_2}=ax_2\end{cases}$，得到 $x_2-x_1=lnx_2-lnx_1$，要证明 $(x_1-\frac{1}{2})\cdot(x_2-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}$，

转化为证明 $2ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}$，设 $\frac{x_2}{x_1}=t$，（$t>1$），即要证明 $2lnt-t+\frac{1}{t}<0$ 在（1，$+\infty$）上恒成立，

再令 $h(t)=2lnt-t+\frac{1}{t}$，（$t>1$），利用导数求其最大值即可．

【解答】解：（1）$f'(x)=e^x(e^x-ax+a)+e^x(e^x-a)=e^x(2e^x-ax)$，

因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，

即 $2e^x-ax\geqslant0$ 恒成立，

令 $g(x)=2e^x-ax$，$g'(x)=2e^x-a$，

当 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 **R** 上单调递增，值域为 **R**，不合题意；

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=ln\frac{a}{2}$，

当 $x<ln\frac{a}{2}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>ln\frac{a}{2}$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,ln\frac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(ln\frac{a}{2}-,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{min}=g(ln\frac{a}{2})=a-aln\frac{a}{2}\geqslant0$，

即 $1-ln\frac{a}{2}\geqslant0$，解得 $0<a\leqslant2e$.

所以实数 a 的取值范围为 $(0,2e]$.

（2）①因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2：

所以 $f'(x)$ 有两个零点，由（1）知，$g(x)_{min}=g(ln\frac{a}{2})=a-aln\frac{a}{2}<0$，解得 $a>2e$，

且 $g(0)=2>0$，$g(2lna)=2a^2-2alna=2a(a-lna)>0$，

所以 $g(x)$ 有两个零点，即 $f'(x)$ 有两个零点，

即函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，此时实数 a 的取值范围为 $(2e,+\infty)$.

②证明：$g(1)=2e-a<0$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，且 $\begin{cases}2e^{x_1}=ax_1\\2e^{x_2}=ax_2\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}\ln2+x_1=\ln a+\ln x_1\\\ln2+x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}$，所以 $x_2-x_1=lnx_2-lnx_1$，

要证 $(x_1-\frac{1}{2})\cdot(x_2-\frac{1}{2})<\frac{1}{4}$，

只需证 $2x_1x_2<x_1+x_2$，只需证 $2x_1x_2(lnx_2-lnx_1)<x_2^2-x_1^2$，

即证明 $2ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}$，

设 $\frac{x_2}{x_1}=t$，$(t>1)$，即要证明 $2lnt-t+\frac{1}{t}<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

记 $h(t)=2lnt-t+\frac{1}{t}$，$(t>1)$，$h'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，

所以 h（t）在区间（1，+∞）上单调递减，

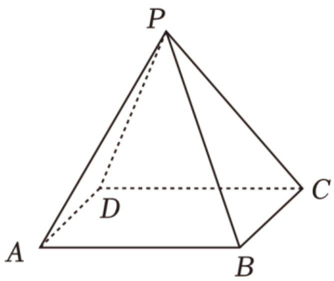
所以 h（t）＜h（1）＝0，即 $2\ln t-t+\frac{1}{t}<0$，

所以 $\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x_2-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}$.

21.（10 分）已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长和高都为 2．现从该棱锥的 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，设随机变量 X 表示所得三角形的面积．

（1）求概率 P（X＝2）的值；

（2）求随机变量 X 的概率分布及其数学期望 E（X）．



【答案】（1）$\frac{2}{5}$；

（2）随机变量 X 的概率分布列为：

X	$\sqrt{5}$	2	$2\sqrt{2}$
P（X）	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

E（X）$=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4}{5}$.

【分析】（1）由题意，分别得出“从 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形”和“X＝2”所包含的基本事件个数，基本事件个数比即为所求概率；

（2）先由题意得到 X 的可能取值，求出对应的概率，进而可得到分布列，求出期望．

【解答】解：（1）从 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，共有 $C_5^3=10$ 种取法，

其中 X＝2 的三角形如△ABD，这类三角形共有 $C_4^3=4$ 个，

因此 $P(X=2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$；

（2）由题意，X 的可能取值为 $\sqrt{5}$，2，$2\sqrt{2}$，

其中 $X=\sqrt{5}$ 的三角形是侧面，这类三角形共有 4 个，

其中 $X=2\sqrt{2}$ 的三角形有两个，△PAC 和△PBD，

因此 $P(X=\sqrt{5})=\frac{2}{5}$，$P(X=2\sqrt{2})=\frac{1}{5}$，

所以随机变量 X 的概率分布列为：

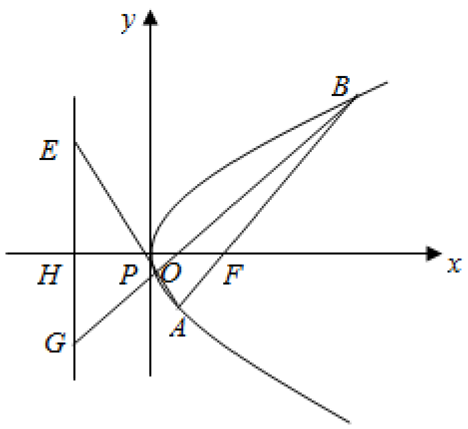
X	$\sqrt{5}$	2	$2\sqrt{2}$
P（X）	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

所求数学期望 $E(X)=\sqrt{5}\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}+2\sqrt{2}\times\frac{1}{5}=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4}{5}$.

22.（10 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，过 F 且斜率为$\frac{4}{3}$的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，B 在 x 轴的上方，且点 B 的横坐标为 4.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）设点 P 为抛物线 C 上异于 A，B 的点，直线 PA 与 PB 分别交抛物线 C 的准线于 E，G 两点，x 轴与准线的交点为 H，求证：HG•HE 为定值，并求出定值.



【答案】见试题解答内容

【分析】（1）由 AB 的斜率为$\frac{4}{3}$，可得$\frac{\sqrt{8p}}{4-\frac{p}{2}}=\frac{4}{3}$，解得 $p=2$ 即可，

（2）设点 $P(\frac{n^2}{4}, n)$，可得 $HE=|-\frac{n+4}{n-1}|$，$HG=|\frac{4n-4}{n+4}|$，即可得 HG•HE $=|-\frac{n+4}{n-1}|\cdot|\frac{4n-4}{n+4}|=4$.

【解答】解：（1）由题意得：$F(\frac{p}{2}, 0)$，

因为点 B 的横坐标为 4，且 B 在 x 轴的上方，所以 $B(4, \sqrt{8p})$，

因为 AB 的斜率为$\frac{4}{3}$，

所以$\frac{\sqrt{8p}}{4-\frac{p}{2}}=\frac{4}{3}$，整理得：$p+3\sqrt{2}\sqrt{p}-8=0$，

即 $(\sqrt{p}-\sqrt{2})(\sqrt{p}+4\sqrt{2})=0$，得 $p=2$，

抛物线 C 的方程为：$y^2=4x$.

（2）由（1）得：B（4，4），F（1，0），准线方程 $x=-1$，

直线 l 的方程：$y=\frac{4}{3}(x-1)$，

由 $\begin{cases} y=\frac{4}{3}(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$ 解得 $x=\frac{1}{4}$ 或 $x=4$，于是得 $A(\frac{1}{4},\ -1)$.

设点 $P(\frac{n^2}{4},\ n)$，又题意 $n\neq1$ 且 $n\neq-4$，

所以直线 PA：$y+1=\frac{4}{n-1}(x-\frac{1}{4})$，令 $x=-1$，得 $y=-\frac{n+4}{n-1}$，

即 $HE=|-\frac{n+4}{n-1}|$，……（8 分）

同理可得：$HG=|\frac{4n-4}{n+4}|$，

$HG\cdot HE=|-\frac{n+4}{n-1}|\cdot|\frac{4n-4}{n+4}|=4$.

【选做题】本题包括 23、24、25 三小题，请选定其中两题，并在答题卡相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

23．（10 分）已知 1 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的一个特征值，求点（1，2）在矩阵 A 对应的变换作用下得到的点的坐标．

【答案】见试题解答内容

【分析】本题可先将特征值 1 代入特征多项式解得 a 的值，即可得到矩阵 A，然后根据变换对应的矩阵关系式的乘法运算可得点（1，2）在矩阵 A 对应的变换作用下得到的点的坐标．

【解答】解：由题意，可知：

矩阵 A 的特征多项式为：$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-2)$，

∵1 是矩阵 A 的一个特征值，

∴f（1）$=0$.

即：$(1-a)(1-2)=0$.

解得 $a=1$，

∴矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

由题意，有矩阵关系式：$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

∴点（1，2）在 A 对应的作用下得到的点为（3，4）.

24．（10 分）已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$．以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+2 \end{cases}$（$t$ 为参数）．

（1）求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程；

（2）求直线 l 被曲线 C 所截得的弦长．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）利用直角坐标与极坐标的互化公式可得曲线 C 的直角坐标方程；消去参数 t 可得直线 l 的普通方程．

（2）利用点到直线的距离公式和勾股定理可得弦长．

【解答】解（1）因为曲线 C 的极坐标方程可化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$．

且 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$．

直线 l：$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+2 \end{cases}$（$t$ 为参数）的普通方程为 $y=\sqrt{3}x+2$．…………（6 分）

（2）圆心（0，1）到直线 l：$y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 $d=\frac{|-1+2|}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}}=\frac{1}{2}$，

又因为半径为 1，所以弦长为 $2\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{3}$．　　　………………（10 分）

25．已知关于 x 的不等式 $x^2-mx+n<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，其中 m，$n\in\mathbf{R}$．求证：$(m-1)\sqrt{x-3}+(n-1)\sqrt{4-x}\leqslant\sqrt{5}$．

【答案】见试题解答内容

【分析】根据关于 x 的不等式 $x^2-mx+n<0$ 的解集求出 m、n 的值，再化简不等式，

利用柯西不等式求得 $(m-1)\sqrt{x-3}+(n-1)\sqrt{4-x}\leqslant\sqrt{5}$．

【解答】证明：因为关于 x 的不等式 $x^2-mx+n<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，

所以 $m=1+2=3$，$n=1\times2=2$；

所以 $(m-1)\sqrt{x-3}+(n-1)\sqrt{4-x}=2\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x}$，且 $x\in[3，4]$；

由柯西不等式可得，$(2\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x})^2\leqslant(2^2+1^2)[(\sqrt{x-3})^2+(\sqrt{4-x})^2]=5$，

当且仅当$2\sqrt{x-3}=\sqrt{4-x}$，即$x=\frac{16}{5}\in[3，4]$时取等号；

所以，$(m-1)\sqrt{x-3}+(n-1)\sqrt{4-x}\leqslant\sqrt{5}$.